

N° CNRS : AO 10003

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

par

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE ET A LA MISE EN OEUVRE D'ALGORITHMES DE REALISATION STOCHASTIQUE

Soutenue le 5 juin 1974 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV **Président**

M. BOZZO

M. de LARMINAT } Examineurs

M. THOMAS

N° d'Ordre : 4 (1974)
N° CNRS : AO 10003

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

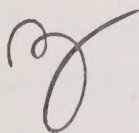
pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

Christian DONCARLI

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



CONTRIBUTION A L'ETUDE ET A LA MISE EN OEUVRE D'ALGORITHMES
DE REALISATION STOCHASTIQUE

Soutenue le 5 juin 1974 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV Président

M. BOZZO

M. de LARMINAT } Examineurs

M. THOMAS

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. SPARSEL Pharmacie

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES -

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. PAUC	"
	M. PETRESCO	"
	M. RAFFIN	"
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. RAVILLY (ENSM)	"
	M. TARDY (ENSM)	"
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLLOUD	"
	M. COLLET	"
	M. MINN	"
	M. MEZENCEV (ENSM)	"
	M. MOUTON	"
	M. DUNOYER	Chimie
	M. GRAFF	"
	M. MARTIN	"
	M. PIERI	"
	M. QUINIOU	"
	M. ROUXEL	"
	M. WOJTKOWIAK	"
	Mlle DEBRAUX	Biologie
	M. GARRIGUES	"
	Mme LE DOUARIN	"
	M. LE DOUARIN	"
	M. SELLIER	"
	M. CAVET	Sciences de la Terre
Professeurs associés	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
Professeurs sans chaire	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. IBISCH	"
	M. BARDON	Physique
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	M. LE NOUR	"
	Mlle OFFRET (ENSM)	"
	M. ROSIER	"

Professeurs sans chaire M. GOBIN (ENSM)

Chimie

M. TOURNOUX

«

M. CHABANEL

Biologie

M. DUPONT

«

M. SAUDRAY

«

M. OTTMANN

Sciences de la Terre

Maîtres de Conférences M. DHOMBRES

Mathématiques

M. DO (ENSM)

«

M. GATESOUBE

«

M. GAPAILLARD

«

M. LAMEAU (ENSM)

«

M. LEBORGNE

«

M. PHAN-THE-LAI (Chargé d'Enseignement)

«

M. VOGEL

«

M. DUBIGEON (Chargé d'Enseignement ENSM)

Mécanique

M. GUEVEL (ENSM)

«

M. SULMONT (ENSM)

«

M. VAUSSY (Chargé d'Enseignement ENSM)

«

M. VILAINE (ENSM)

«

M. CAILLER (IUT)

Physique

M. LE BIHAN

«

M. LE CORRE (IUT)

«

M. LE MAITRE

«

M. LONCKE

«

M. THOMAS (Chargé d'Enseignement IUT)

«

M. BOUCHY (IUT)

Chimie

M. LE MAITRE (Chargé d'Enseignement IUT)

«

Mme MARTIN

«

M. POINTEAU (ENSM)

«

M. AMOURIQ

Biologie

M. LEBRUN

«

Mme NICOLAS-PRATT

«

M. FORESTIER

Sciences de la Terre

M. NICOLAS

«

Secrétaire Général : M. LERAY

La présente thèse a été entreprise au Laboratoire d'Automatique de l'E.N.S.M.-NANTES, que dirige Monsieur le Professeur MEZENCEV, grâce à une allocation de recherches C.N.R.S. Notre travail s'est déroulé sous la responsabilité de Monsieur Ph. De LARMINAT que je remercie pour l'aide constante et les précieux conseils qu'il m'a apportés.

Je remercie également Monsieur le Professeur MEZENCEV, qui a supervisé l'orientation générale de mes travaux, et dont la discipline scientifique et la rigueur m'ont été très utiles pour la mise en forme et la présentation de ce mémoire.

Mes remerciements iront aussi à Monsieur A. BARRAUD pour l'aide qu'il m'a apportée dans toutes les questions se rapportant à l'analyse numérique, et à Monsieur BOLZO, qui m'a transmis des enregistrements réels sur lesquels j'ai pu essayer les méthodes envisagées dans ce travail.

J'exprime ma reconnaissance à Monsieur Y. THOMAS dont les suggestions permettront peut être une extension de ce travail à la théorie de la commande.

Je remercie enfin tout le personnel du Centre de Calcul Universitaire de Nantes et plus particulièrement Messieurs H. D'HERVE et A. CHEVRE pour leurs conseils en programmation, ainsi que les opérateurs qui ont grandement facilité mon travail lors des passages sur ordinateur.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555015_0031

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Chapitre 1 - Généralités

- 1.1 - Fonction de corrélation - Caractère réel non négatif
- 1.2 - Processus à représentation Markovienne
- 1.3 - Présentation générale du problème
- 1.4 - Théorème sur le caractère positif réel
- 1.5 - Démonstration du théorème 1.4
- 1.6 - Introduction de la forme filtre
- 1.7 - Propriété des formes filtres
- 1.8 - Propriété caractéristique des modèles filtres minimaux
- 1.9 - Résumé du chapitre 1

Chapitre 2 - Algorithme de FAURRE

- 2.1 - Position du problème
- 2.2 - Principe de la méthode
- 2.3 - Conclusion de l'étude théorique
- 2.4 - Modalités pratiques d'application

Chapitre 3 - Extension de la méthode de MEHRA

- 3.1 - Position du problème
- 3.2 - Rappel sur le filtrage
- 3.3 - Définition d'une suite de gains convergeant vers L_{opt}
- 3.4 - Principe de la méthode
- 3.5 - Propriétés de l'innovation
- 3.6 - Expression de L_i
- 3.7 - Etude de la suite L_i
- 3.8 - Formulation de l'algorithme - Modalités d'application
- 3.9 - Conclusion

.../...

Chapitre 4 - Identification par filtrage non linéaire

- 4.1 - Introduction
- 4.2 - L'identification par filtrage
- 4.3 - Filtre non linéaire optimal et sous-optimal
- 4.4 - Identification d'une forme filtre

Chapitre 5 - Partie expérimentale

- 5.1 - Etude en simulation
- 5.2 - Etude sur exemple réel

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

Une très large classe de systèmes linéaires stochastiques discrets peut être modélisée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + Bu_k + v_k \\ y_k = Hx_k + w_k \end{cases}$$

où x est l'état du système (dimension n) $\dim F = n \times n$
 u est la commande (dimension p) $\dim B = n \times p$
 y est la sortie (dimension m) $\dim H = m \times n$

$\begin{matrix} v_k \\ w_k \end{matrix}$ sont des perturbations aléatoires centrées, caractérisées par les matrices :

$$(Q, R, S) \text{ telles que } E \left\{ \begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ w_j \end{bmatrix}^T \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta(i-j)$$

$$\text{avec } \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

et $\dim Q = n \times n$
 $\dim R = m \times m$ $()^T$ désigne la transposition matricielle
 $\dim S = n \times m$

Identifier le processus consiste à trouver les matrices F, B, H, Q, R, S compte tenu des informations d'entrées - sorties, c'est à dire la suite des couples $\{u_k, y_k\}$. Le triplet de matrices (F, B, H) constitue un modèle "déterministe" que l'on peut chercher à identifier isolément, bien qu'il soit théoriquement préférable d'identifier F, B, H, Q, R, S simultanément. En posant $x = x^1 + x^2$, on pourra toujours considérer la sortie comme la somme de :

- la sortie "déterministe" y_k^1 issue du modèle :

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = F x_k^1 + B u_k + 0 \\ y_k^1 = H x_k^1 + 0 \end{cases}$$

- la sortie "aléatoire" y_k^2 issue du modèle

$$\begin{cases} x_{k+1}^2 = F x_k^2 + v_k \\ y_k^2 = H x_k^2 + w_k \end{cases}$$

Notre étude se limite à la recherche du modèle mathématique de la sortie aléatoire, soit en omettant l'indice (2) :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + v_k \\ y_k = Hx_k + w_k \end{cases}$$

à partir des informations fournies par la suite $\{y_k\}$

Selon les cas, nous identifions (F,H,Q,R,S) ou simplement (Q,R,S), car F et H peuvent être déjà identifiés lors de l'étude du modèle déterministe.

Dans l'optique d'un modèle "de connaissance", l'identification de (Q,R,S) pourrait avoir un intérêt propre, dans la mesure où ces paramètres pourraient avoir une signification physique pour le processus (par exemple, les caractéristiques statistiques internes à un réacteur nucléaire).

Néanmoins, on sait (et nous développerons ce point) que, même pour F et H fixés, il existe divers triplets (Q,R,S) qui conduisent à des suites $\{y_k\}$ ayant des caractéristiques statistiques identiques. Il est alors clair que la seule connaissance de la suite $\{y_k\}$ ne permet pas de retrouver les matrices (Q,R,S) du processus, mais simplement un triplet statistiquement équivalent.

Dans l'optique où l'on recherche un modèle "de conduite", l'identification consiste à fournir les éléments permettant de prédire la sortie, c'est à dire finalement à fournir un filtre. Or, pour des caractéristiques statistiques données de $\{y_k\}$, et sous certaines conditions (observabilité du couple F,H), le filtre linéaire optimal stationnaire est unique.

Ces considérations expliquent le point de vue adopté dans ce travail :

- étant donné une suite $\{y_k\}$, de fonction de corrélation $A_i = E (y_k y_{k-i}^T)$
- trouver
 - d'une part le couple (F,H) (s'il n'est pas donné a priori)
 - d'autre part le couple (L,T₀) tel que la suite $\{z_k\}$ définie par

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = F\theta_k + Lv_k \\ z_k = H\theta_k + v_k \end{cases} \quad \text{où} \quad E(v_i v_j^T) = T_0 \delta(i-j)$$

ait même fonction de corrélation que $\{y_k\}$

- le modèle précédent est appelé "forme filtre" et sera décrit en détail en I.6
- L est le gain du filtre prédicteur optimal stationnaire, directement utilisable pour prédire les valeurs de y_k , connaissant les valeurs précédentes
- v_k est appelé "innovation" du processus $\{y_k\}$

Recherchant des méthodes utilisables sur un ordinateur de moyenne capacité, nous n'avons pas envisagé des théories [D.T. MAGILL ; C.G. HILBORN] faisant appel à l'estimation Bayésienne, car celles-ci nécessitent un volume de calcul très important.

Dans le chapitre I, nous présentons certaines généralités concernant les définitions des notations employées, et nous établissons diverses relations fondamentales. Après nous être intéressés au caractère positif réel des fonctions de corrélation, nous présentons la démonstration (due à P. FAURRE) d'un théorème d'existence d'une réalisation de taille minimale. Ensuite nous introduisons la forme filtre, et étudions les propriétés de la séquence innovation, ainsi que la commandabilité du couple (F,L). Le chapitre I se termine par un bref résumé des propriétés établies.

Le chapitre II est consacré à l'algorithme de FAURRE, qui permet d'identifier globalement (F,H,L,T) à partir d'un échantillon de la sortie $\{y_k\}$. Cet algorithme est basé sur les propriétés de la fonction de corrélation de la sortie et fait appel à une factorisation minimale de la matrice de HANCKEL construite à l'aide de cette fonction de corrélation. Cette factorisation est effectuée par un algorithme "de réalisation" du type Ho-Irving que nous supposons connu. Nous présentons le principe de la méthode, ainsi qu'une démonstration (qui semble originale) de la convergence de l'algorithme de FAURRE. Nous envisageons ensuite les modalités pratiques d'application de cet algorithme.

Dans le chapitre III, nous présentons une extension originale de la méthode de MEHRA. Le couple (H,F) est supposé connu a priori, et cette méthode permet d'identifier (L,T) à partir d'un échantillon de la sortie $\{y_k\}$.

L'algorithme utilise les propriétés de la fonction de corrélation de l'innovation qui est une séquence blanche dans le cas du filtre optimal. La méthode consiste à construire une suite de gains convergeant vers le gain optimal stationnaire. Nous établissons que l'algorithme est à convergence quadratique. Nous considérons ensuite les modalités de mise en oeuvre de cette méthode.

Le chapitre IV est consacré à l'identification de L et T_0 par filtrage non linéaire, qui découle directement des travaux de Ph. DE LARMINAT. Comme pour la méthode de MEHRA, le couple (H, F) est supposé connu à priori. Après avoir repris les propriétés générales des filtres non linéaires optimaux, nous présentons la forme particulière de ces filtres pour l'identification de L et T_0 , et nous décrivons les modalités d'application.

Après cette étude théorique, nous présentons dans le chapitre V la partie expérimentale de notre travail.

Cette partie se décompose en deux :

- Une étude en simulation : Plusieurs processus sont simulés sur calculateur numérique, et nous appliquons successivement les trois méthodes exposées dans la partie théorique.

- Une étude sur exemple réel : Il s'agit d'un enregistrement de roulis-tangage d'un navire, et nous recherchons un modèle susceptible de le représenter, par chacune des méthodes précédemment exposées.

En conclusion de notre travail, nous effectuons la comparaison des résultats obtenus, et nous essayons de déduire des critères de choix de l'une ou l'autre des méthodes envisagées.

Chapitre 1

GENERALITES

Le but de ce chapitre est de présenter certaines définitions, de préciser les notations employées, d'établir diverses relations fondamentales, et de délimiter le cadre de notre étude.

1.1 - FONCTION DE CORRELATION - CARACTERE REEL NON NEGATIF

Nous supposerons connues les notions de variable aléatoire, de séquence aléatoire et de réalisation (ou échantillon) d'une variable aléatoire.

Soit une séquence aléatoire multivariable $\{Y_k\}$, la suite des matrices d'autocorrélation, souvent baptisée "fonction de corrélation" est :

$$A(i,j) = E(Y_i Y_j^T)$$

* Si $\{Y_k\}$ est stationnaire,

$$(1.1) \quad E(Y_k Y_{k-i}^T) = A_i \text{ est fonction de } i \text{ seul}$$

notons que A_i est une fonction matricielle parasymétrique ($A_{-i} = A_i^T$)

* Si, de plus $\{Y_k\}$ est ergodique, en notant $\{y_k\}$ un échantillon infini de $\{Y_k\}$

$$(1.2) \quad A_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k y_{k-i}^T$$

Remarque : Une séquence aléatoire gaussienne $\{Y_k\}$, est entièrement décrite par sa fonction de corrélation.

* Caractère réel non négatif

Considérons une quantité infinie d'échantillons du processus stationnaire ergodique $\{Y_k\}$, que l'on note $\{y_1 y_2 \dots y_N \dots\}_p$ pour $p = 1, 2, \dots, \infty$

Considérons les matrices A_p définies, pour chaque échantillon, par :

$$A_p = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}_p \begin{bmatrix} y_1^T y_1^T & y_1^T y_2^T & \dots & y_1^T y_N^T & \dots \\ y_2^T y_1^T & y_2^T y_2^T & & y_2^T y_3^T & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ y_N^T y_1^T & & & y_N^T y_N^T & y_N^T y_{N+1}^T \end{bmatrix}_p$$

Les matrices A_p ainsi définies sont, par construction, définies non négatives.

Considérons alors $A = E(A_p)$, calculée comme moyenne sur tous les échantillons dont on dispose ($p = 1, 2, \dots, \infty$)

$$\text{alors } A = \lim_{P \rightarrow +\infty} \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P A_p$$

A étant une somme de matrices non négatives est elle-même non négative. Par ailleurs, A peut s'écrire :

$$A = \begin{bmatrix} E(y_1 y_1^T) & E(y_1 y_2^T) & \dots & E(y_1 y_N^T) & \dots \\ E(y_2 y_1^T) & E(y_2 y_2^T) & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ & & & E(y_N y_N^T) & \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

* En utilisant le fait que $\{Y_k\}$ est stationnaire ergodique, on parvient alors à :

$$A = \begin{vmatrix} A_0 & A_1^T & \dots & A_N^T \\ A_1 & A_0 & A_1^T & \\ \vdots & A_1 & A_0 & A_1^T \\ \vdots & & & \end{vmatrix} \quad \text{Définie non négative}$$

On dit que la fonction de corrélation $\{A_0, A_1, \dots, A_i, \dots\}$ est une fonction de type positif réel.

Remarque : Inversement, si la fonction $\{A_i\}$ n'est pas telle que A soit définie non négative, alors $\{A_i\}$ ne peut pas être une fonction de corrélation.

1.2 - PROCESSUS A REPRESENTATION MARKOVIENNE - RELATIONS FONDAMENTALES

Définition : Le processus aléatoire vectoriel (de dimension m) stationnaire ergodique $\{Y_k\}$, de fonction de corrélation donnée $\{A_i\}$, est un processus à représentation markovienne, s'il existe un système linéaire stochastique récurrent de la forme suivante :

$$(2.1) \quad \begin{cases} X_{k+1} = FX_k + V_k \\ Y_k = HX_k + W_k \end{cases}$$

dont les propriétés sont précisées ci-dessous, et tel que la fonction de corrélation déduite de (2.1) est identique à la fonction de corrélation donnée A_i

X_k est l'état du système (dimension n inconnue)

F est une matrice ($n \times n$) asymptotiquement stable

H est une matrice ($m \times n$)

$\begin{vmatrix} V_k \\ W_k \end{vmatrix}$ est une séquence blanche centrée, définie par les matrices :

. Q ($n \times n$ symétrique)

. R ($m \times m$ symétrique) telles que $E \begin{vmatrix} V_i \\ W_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_j \\ W_j \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} Q & S \\ S & R \end{vmatrix} \delta(i-j)$

. S ($n \times m$)

$$\text{ou } \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

et telle que $\begin{vmatrix} V_k \\ W_k \end{vmatrix}$ est indépendant de X_{k-i} pour $i \geq 0$.

Le système (2.1) est alors appelé modèle de $\{Y_k\}$

(un tel modèle n'est évidemment pas unique, ne serait-ce que par changement de base)

On notera les points suivants :

. $\begin{vmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{vmatrix}$ est définie non négative.

. $P = E(X_k X_k^T)$ covariane de l'état, est définie non négative.

Dans toute la suite de notre travail, nous nous intéressons uniquement aux processus à représentation markovienne.

Expression de la fonction de corrélation A_i

On considère le processus $\{Y_k\}$ vérifiant le modèle (2.1)

- Expression de A_0

$$A_0 = E(y_k y_k^T)$$

$$(2.1) \rightarrow A_0 = E[(HX_k + W_k)(HX_k + W_k)^T]$$

En utilisant le fait que W_k est indépendant de X_k , il vient :

$$\underline{A_0 = HPH^T + R}$$

- Expression de P

$$P = E(X_k X_k^T) = E[(FX_{k-1} + V_{k-1})(FX_{k-1} + V_{k-1})^T]$$

En utilisant l'indépendance de V_{k-1} et X_{k-1} ;

$$\underline{P = FPF^T + Q}$$

- Expression de A_1

Calculons A_1

$$A_1 = E(Y_{k+1} Y_k^T) = E[(HX_{k+1} + W_{k+1})(HX_k + W_k)^T]$$

$$= E[[H(FX_k + V_k) + W_{k+1}](HX_k + W_k)^T]$$

$$= E[(HFX_k + HV_k + W_{k+1})(HX_k + W_k)^T]$$

En utilisant la remarque concernant l'indépendance de $\begin{vmatrix} V \\ W_k^k \end{vmatrix}$ et de $\{X_k, X_{k-1}, \dots\}$, il vient :

$$A_1 = HFPF^T + HS, \text{ soit}$$

$$A_1 = H(FPH^T + S) \quad \text{ou encore, en posant} \quad \underline{G = FPH^T + S} \quad \text{on a}$$

$$\underline{A_1 = HG}$$

- Expression de $A_2, \dots, A_i, \dots$

$$\begin{aligned}
 A_2 &= E(Y_{k+2} Y_k^T) = E[(HX_{k+2} + W_{k+2})(HX_k + W_k)^T] \\
 &= E\{[H(FX_{k+1} + V_{k+1}) + W_{k+2}](HX_k + W_k)^T\} \\
 &= E[(HFX_{k+1} + HV_{k+1} + W_{k+2})(HX_k + W_k)^T] \\
 &= E\{[HF(FX_k + V_k) + HV_{k+1} + W_{k+2}](HX_k + W_k)^T\} \\
 &= E[(HF^2 X_k + HFV_k + HV_{k+1} + W_{k+2})(HX_k + W_k)^T]
 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés d'indépendance déjà énoncées

$$A_2 = HF^2 PH^T + HFS \quad \text{soit}$$

$$A_2 = HF(FPH^T + S) \quad \text{d'ou}$$

$$A_2 = HFG$$

Ainsi de suite, on démontre finalement que :

$$A_i = HF^{i-1} G \quad i = 1, 2, \dots$$

1.3 - PRESENTATION GENERALE DU PROBLEME

Etant donné un processus de fonction de corrélation $\{A_i\}$, trouver un modèle de la forme (2.1) (en supposant qu'il en existe un de dimension finie). En d'autres termes, étant connue la suite $\{A_i\}$, trouver un ensemble matrices (F, H, Q, R, S) telles que :

$$\begin{cases} A_0 = HPH^T + R \\ A_i = HF^{i-1} G, i = 1, 2, \dots \text{ avec} \end{cases} \quad \begin{cases} P = FPF^T + Q \\ G = FPH^T + S \end{cases} \quad \begin{cases} \dim P = n \times n \\ \dim G = n \times m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dim A_0 = \dim A_i = m \times m \\ \text{et } P \text{ définie non négative} \\ \begin{vmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{vmatrix} \text{ définie non négative} \end{cases}$$

$$\dim Q = n \times n$$

$$\dim R = m \times m \quad Q, R \text{ et } P \text{ sont symétriques par définition.}$$

$$\dim S = n \times m$$

Alors on dira que l'ensemble des matrices (F, H, Q, R, S) forme un modèle (ou encore réalisation) de Y_k ou de A_i .

Parmi tous les modèles possibles, il en existe forcément au moins un de dimension minimale. On recherchera plus particulièrement ces modèles minimaux.

Nous allons développer des propriétés théoriques reliant $\{A_i\}$ à (F, H, Q, R, S) et permettant d'obtenir une réalisation minimale.

Le problème pratique sera différent, car $\{A_i\}$ n'est pas donné, mais seulement calculé à partir d'un échantillon fini de $\{Y_k\}$.

Nous envisagerons alors divers points, et en particulier le problème de l'approximation de la suite $\{A_i\}$ théorique.

1.4 - THEOREME SUR LE CARACTERE POSITIF REEL

Ce théorème est fondamental et concerne l'existence et la minimalité d'un modèle markovien.

Hypothèses :

Soit une suite $\{A_i\}$ définie pour $i = 0, 1, \dots, \infty$; telle que :

- $\{A_i\}$ a le caractère positif réel
- Il existe des matrices (H, F, G) telle que

$$A_i = HF^{i-1}G \quad \text{pour } i \geq 1$$
 (H, F, G) commandable et observable *
- F asymptotiquement stable

Conclusions

Il existe des matrices (P, Q, R, S) telles que

$$\begin{aligned} \cdot A_0 &= HPH^T + R & \cdot P &\text{ définie non négative} \\ \cdot P &= FPF^T + Q & \text{et} & \cdot \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \text{ définie non négative} \\ \cdot G &= FPH^T + S \end{aligned}$$

* Le couple H F est observable si, et seulement si, la matrice

$$\begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{est de rang maximum}$$

Le couple FG est commandable si, et seulement si, la matrice

$$\begin{bmatrix} G & FG & \dots & F^{n-1}G \end{bmatrix} \quad \text{est de rang maximum.}$$

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, nous allons envisager sa principale conséquence.

Le modèle vérifiant les hypothèses du théorème 1.4 est minimal. En effet, le fait que (H, F, G) soit commandable et observable entraîne la minimalité de ce modèle (cf. théorie de l'algorithme de HO [1]* car (H, F, G) est une factorisation minimale de la matrice :

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots \\ A_2 & A_3 & \dots & \\ A_3 & A_4 & \dots & \end{bmatrix}$$

La réciproque est évidente : si la factorisation (H, F, G) est minimale, le modèle ainsi construit est minimal puisqu'il n'existe pas de factorisation plus petite.

1.5 - Démonstration du théorème 1.4

Cette démonstration a été proposée par P. FAURRE [2] et nous l'avons reprise développant certains points de détail.

On aura besoin de lemmes suivants :

lemme 1.5.1.

On avait dit (cf 1.1) qu'une suite $\{A_i\}$ présentait un caractère réel non négatif si la matrice A était définie non négative. Le caractère réel non négatif de $\{A_i\}$ s'exprime de manière équivalente, en écrivant que :

* Etant donné une suite de matrices, $\{A_1, A_2, \dots, A_i, \dots\}$ l'algorithme de HO (ou tout autre algorithme dit "de réalisation") fournit des triplets de matrices (H, F, G) tels que

$$\left| \begin{array}{l} HF^{i-1}G = A_i \\ (HF) \text{ observable} \\ (FG) \text{ commandable} \end{array} \right.$$

On démontre alors qu'un tel triplet est de dimension minimale ; cette dimension est d'ailleurs égale au rang de la matrice à HANKEL

$$H = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots \\ A_2 & A_3 & A_4 & \dots \\ A_3 & A_4 & \dots & \end{bmatrix}$$

-
- (1) B.L. HO, R.E. KALMAN Effective construction of Linear State-Variable models from Input/Output data Proc. 3rd. Alberton conférence, pp 449.459. 1965
 - (2) P. FAURRE. Réalisation markoviennes de processus stationnaires IRIA Mars 1973

quel que soit $\{u_k\}$ suite quelconque définie pour $k = (-1, -2, \dots, -\infty)$

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} u_i^T A_{k-i} u_k \geq 0$$

En effet, considérons la quantité suivante :

$$\begin{bmatrix} u_{-1}^T & u_{-2}^T & \dots & u_{-i}^T & \dots \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u_{-1} \\ \vdots \\ u_{-k} \end{bmatrix}$$

qui s'écrit en utilisant la parasymétrie de $\{A_i\}$ ($A_{-i} = A_i^T$) :

$$\begin{bmatrix} u_{-1}^T & u_{-2}^T & \dots & u_{-i}^T & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 & A_{-1} & A_{-2} & \dots \\ A_1 & A_0 & A_{-1} & \dots \\ A_2 & A_1 & A_0 & A_{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_{-2} \\ \vdots \\ u_{-k} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

En développant, cette quantité s'écrit : (en utilisant la parasymétrie de la suite $\{A_i\}$) :

$$\begin{bmatrix} u_{-1}^T & u_{-2}^T & \dots & u_{-i}^T & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} & A_{k+1} & u_k & & \\ -1 & & & & \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} & A_{k+2} & u_k & & \\ \vdots & & & & \\ -1 & & & & \\ \sum_{k=-\infty}^{-1} & A_{k+i} & u_k & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

soit :

$$u_{-1}^T \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{k+1} u_k + u_{-2}^T \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{k+2} u_k + \dots + u_{-i}^T \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{k+i} u_k + \dots$$

L'expression 1.51. peut donc s'écrire :

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} u_i^T A_{k-i} u_k = \begin{bmatrix} u_{-1}^T & u_{-2}^T & \dots & u_{-i}^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u_{-1} \\ \vdots \\ u_{-k} \end{bmatrix}$$

La positivité du 1^{er} membre implique, et réciproquement la définit positivité de A. On peut donc retenir l'une ou l'autre comme définition du caractère positif réel (ou réel non négatif).

Lemme 1.5.2

Si les relations

$A_i = HF^{i-1}G$ F asymptotiquement stable $A_0 = HPH^T + R$ $P = FPF^T + Q$ $G = FPH^T + S$ P définie non négative $\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ définie non négative (P, Q, R symétriques)	$i \geq 1$
---	--

sont vérifiées, alors :

$$\sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} u_i^T A_{k-i} u_k = x_0^T P x_0 + \sum_{i=-\infty}^{-1} \{x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2x_i^T S u_i\}$$

avec $x_i = \sum_{k=-\infty}^{i-1} F^{i-k-1} H^T u_k$

(ou encore $x_{i+1} = F^T x_i + H^T u_i$)

avec $x_{-\infty} = 0$

Démonstration

Considérons la quantité

$$\Delta_{i+1} (x^T P x) \triangleq x_{i+1}^T P x_{i+1} - x_i^T P x_i$$

On vérifie immédiatement la suite des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i+1} (x^T P x) &= (x_i^T F + u_i^T H) P (F^T x_i + H^T u_i) - x_i^T P x_i \\
 &= (x_i^T F P + u_i^T H P) (F^T x_i + H^T u_i) - x_i^T P x_i \\
 &= x_i^T F P F^T x_i + u_i^T H P F^T x_i + x_i^T F P H^T u_i + u_i^T H P H^T u_i - x_i^T P x_i \\
 &= x_i^T [F P F^T - P] x_i + 2 x_i^T F P H^T u_i + u_i^T H P H^T u_i \\
 &= x_i^T [F P F^T - P] x_i + 2 x_i^T (F P H^T + S) u_i - 2 x_i^T S u_i + u_i^T (H P H^T + R) u_i \\
 &\quad - u_i^T R u_i \\
 &= -x_i^T Q x_i + 2 x_i^T G u_i - 2 x_i^T S u_i + u_i^T A_0 u_i - u_i^T R u_i
 \end{aligned}$$

soit en ordonnant :

$$\Delta_{i+1} (x^T P x) = - [x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2 x_i^T S u_i] + u_i^T A_0 u_i + 2 x_i^T G u_i$$

Soit, en écrivant toutes les égalités jusqu'à l'infini, et en additionnant :

$$\left| \begin{aligned}
 x_0^T P x_0 - x_{-1}^T P x_{-1} &= - [x_{-1}^T Q x_{-1} + u_{-1}^T R u_{-1} + 2 x_{-1}^T S u_{-1}] + u_{-1}^T A_0 u_{-1} + 2 x_{-1}^T G u_{-1} \\
 x_{-1}^T P x_{-1} - x_{-2}^T P x_{-2} &= - [x_{-2}^T Q x_{-2} + u_{-2}^T R u_{-2} + 2 x_{-2}^T S u_{-2}] + u_{-2}^T A_0 u_{-2} + 2 x_{-2}^T G u_{-2} \\
 &\vdots \\
 x_{i-1}^T P x_{i-1} - x_{i-2}^T P x_{i-2} &= - [x_{i-2}^T Q x_{i-2} + u_{i-2}^T R u_{i-2} + 2 x_{i-2}^T S u_{i-2}] + u_{i-2}^T A_0 u_{i-2} + 2 x_{i-2}^T G u_{i-2} \\
 &\vdots \\
 x_i^T P x_i - x_{i-1}^T P x_{i-1} &= - [x_{i-1}^T Q x_{i-1} + u_{i-1}^T R u_{i-1} + 2 x_{i-1}^T S u_{i-1}] + u_{i-1}^T A_0 u_{i-1} + 2 x_{i-1}^T G u_{i-1} \\
 &\vdots \\
 x_{i+1}^T P x_{i+1} - x_i^T P x_i &= - [x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2 x_i^T S u_i] + u_i^T A_0 u_i + 2 x_i^T G u_i
 \end{aligned} \right.$$

$$x_0^T P x_0 = - \sum_{i=-\infty}^{-1} [x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2 x_i^T S u_i] + \sum_{i=-\infty}^{-1} u_i^T A_0 u_i + 2 \sum_{i=-\infty}^{-1} x_i^T G u_i$$

Examinons le terme $x_i^T G u_i$:

En utilisant l'expression de $x_i = \sum_{k=-\infty}^{i-1} F^{T^{i-k-1}} H^T u_k$

$$\text{Alors } x_i^T G u_i = \left(\sum_{k=-\infty}^{i-1} F^{T^{i-k-1}} H^T u_k \right)^T G u_i$$

Soit

$$x_i^T G u_i = \sum_{k=-\infty}^{-1} u_k^T H F^{i-k-1} G u_i = \sum_{k=-\infty}^{i-1} u_i^T G^T F^{T^{i-k-1}} H^T u_k$$

D'où

$$x_0^T P x_0 = - \sum_{i=-\infty}^{-1} (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2 x_i^T S u_i) + \sum_{i=-\infty}^{-1} u_i^T A_0 u_i \\ + \sum_{i=-\infty}^{-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{i-1} u_k^T H F^{i-k-1} G u_i + \sum_{k=-\infty}^{i-1} u_i^T G^T F^{i-k-1} H^T u_k \right]$$

En utilisant le fait que :

$$A_j = H F^{j-1} G$$

$$x_0^T P x_0 + \sum_{i=-\infty}^{-1} (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2 x_i^T S u_i) = \sum_{i=-\infty}^{-1} \left[u_i^T A_0 u_i + \sum_{k=-\infty}^{i-1} u_k^T A_{i-k} u_i \right. \\ \left. + \sum_{k=-\infty}^{i-1} u_i^T A_{i-k}^T u_k \right] \\ = [u_{-1} \ u_{-2} \dots u_{-n} \dots] A \begin{bmatrix} u_{-1} \\ u_{-2} \\ \vdots \\ u_{-n} \end{bmatrix}$$

En utilisant le lemme 1.5.1.

$$x_0^T P x_0 + \sum_{i=-\infty}^{-1} (x_i^T Q x_i + u_i^T R u_i + 2 x_i^T S u_i) = \sum_{i=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{-1} u_i^T A_{k-i} u_k$$

Démonstration du théorème 1.4

Rappelons tout d'abord l'énoncé de ce théorème :

Hypothèses

Soit une suite $\{A_i\}$ définie pour $(i = 0, 1, \dots, \infty)$ telle que

. $\{A_i\}$ a le caractère positif réel

. Il existe des matrices (H, F, G) telle que

$$A_i = H F^{i-1} G \quad \text{pour } i \geq 1$$

. (H, F, G) commandable et observable

. F asymptotiquement stable

Conclusions

Il existe des matrices (P, Q, R, S) telle que :

$$\left. \begin{array}{l} \cdot A_0 = HPH^T + R \\ \cdot P = FPF^T + Q \\ \cdot G = FPH^T + S \end{array} \right\} \text{ et } \begin{array}{l} \cdot P \text{ définie non négative} \\ \cdot \begin{vmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{vmatrix} \text{ définie non négative} \end{array}$$

Supposons $\{A_i\}$ de type réel non négatif, et définissons la matrice par

$$x^T P^* x = \inf_U U^T A U$$

où $U = \{u_i\}$ appartient à l'ensemble des suites $\{u_i\}$ telles que la contrainte néaire

$$x = \sum_{i=-\infty}^{-1} (F^T)^{-i-1} H^T u_i \quad \text{soit vérifiée}$$

- Le couple HF étant supposé observable, cet ensemble n'est pas vide
- L'infimum est une forme quadratique définie non négative, car c'est l'infimum d'une forme quadratique (A) définie non négative, sous contrainte linéaire.

Donc, la définition de P^* est cohérente, et P^* est définie non négative.

On définit les matrices $Q^* S^* R^*$ par :

$$\begin{array}{lcl} Q^* & = & P^* - F P^* F^T \\ S^* & = & G - F P^* H^T \\ R^* & = & A_0 - H P^* H^T \end{array}$$

Il reste à prouver que $\begin{vmatrix} Q^* & S^* \\ S^{*T} & R^* \end{vmatrix}$ est définie non négative.

Considérons l'une des suites $U = \{u_{-1} u_{-2} \dots\}$ qui conduisent le système $(F^T H^T)$ dans l'état ξ à l'instant 0. (ξ arbitraire)

Considérons la suite $V = \{v_{-1} v_{-2} \dots\}$ avec $v_i = u_{i+1}$ pour $i < -1$ et v_{-1} arbitraire

V conduit le système $(F^T H^T)$ dans l'état ξ à l'instant -1, et l'état v à l'instant 0. En utilisant les lemmes 1.5.1 et 1.5.2, il vient :

$$v^T A v - U^T A U = v^T P^* v - \xi^T P^* \xi + [\xi^T v_{-1}^T] \begin{bmatrix} Q^* & S^* \\ S^{*T} & R^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ v_{-1} \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \xi^T & v_{-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^* & S^* \\ S^{*T} & R^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ v_{-1} \end{bmatrix} = (v^T A v - v^T P^* v) - (U^T A U - \xi^T P^* \xi)$$

Donc, d'après la définition de P^* ; on a simultanément :

$$v^T A v - v^T P^* v \geq 0$$

$U^T A U - \xi^T P^* \xi \geq 0$ Cette dernière quantité peut être rendue arbitrairement petite par un choix convenable de U .

Donc :

$$(\xi^T \ v_{-1}^T) \begin{bmatrix} Q^* & S^* \\ S^{*T} & R^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ v_{-1} \end{bmatrix} \geq 0$$

avec ξ et v_{-1} arbitraires.

Donc $\begin{bmatrix} Q^* & S^* \\ S^{*T} & R^* \end{bmatrix}$ est une matrice définie non négative, ce qui achève la démonstration du théorème 1.4. Ce théorème est capital, car il assure l'existence d'un modèle construit à partir de tout triplet (H, F, G) commandable et observable, tel que $A_i = H F^{i-1} G$ pour $i \geq 1$ (on dit que H, F, G est une factorisation de A). D'autre part, le modèle ainsi construit est minimal (cf [2]).

1.6 - INTRODUCTION DE LA FORME FILTRE

Notre objectif n'étant pas de reprendre la théorie du filtrage de Kalman, certains résultats classiques sont simplement rappelés ici sans démonstration.

1.6.1 - Structure du filtre

Considérons un modèle observable de la forme (2.1), minimal ou non :

$$(6.1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = F x_k + v_k \\ y_k = H x_k + w_k \end{cases}$$

Les équations du filtre stationnaire optimal sont les suivantes :

$$\begin{cases} x_{k+1/k} = F x_{k/k-1} + L v_k \\ v_k = y_k - H x_{k/k-1} \end{cases} \quad \text{avec } (F-LH) \text{ asymptotiquement stable}$$

où $x_{k+1/k}$ est la "prédiction" de x_{k+1} , c'est-à-dire la meilleure estimée de x_{k+1} sur la base de $\{y_k, y_{k-1}, \dots\}$. Dans le cas de bruits gaussiens, on a $x_{k+1/k} = E(x_{k+1}/y_k, y_{k-1}, \dots)$ (espérance conditionnelle)

L est le gain du filtre prédicteur optimal stationnaire

v_k écart entre la mesure et la grandeur prédite est l'innovation.

On définit l'erreur de prédiction :

$$e_k = x_k - x_{k/k-1}$$

On pose :

$$M_k = E(e_k e_k^T)$$

1.6.2 - Propriété de l'innovation dans le cas d'un filtre optimal

La séquence innovation est une séquence blanche, centrée, de variance covariance T_o , avec :

$$T_o = E(v_k v_k^T) = H M H^T + R \quad M = E(e_k e_k^T)$$

Démonstration :

On reprend la définition de l'innovation :

$$v_k = y_k - H x_{k/k-1}$$

Sachant d'autre part que :

$$y_k = H x_k + w_k, \text{ il vient :}$$

$$v_k = H x_k + w_k - H x_{k/k-1}$$

soit en faisant intervenir l'erreur de prédiction :

$$v_k = H e_k + w_k$$

On calcule alors :

$$T_i = E(v_{k+i} v_k^T)$$

On a :

$$T_i = E[(H e_{k+i} + w_{k+i}) (H e_k + w_k)^T]$$

On remarque les points suivants :

$$e_k \text{ dépend de } \begin{pmatrix} v_{k-1} & v_{k-2} & \dots \\ w_{k-1} & w_{k-2} & \dots \end{pmatrix}$$

v_k est une fonction linéaire de $\{y_k, y_{k-1}, \dots\}$

Posons donc $v_k = L(y_k, y_{k-1} \dots)$ avec L fonction linéaire.

Alors, en développant l'expression de T_i , on obtient :

$$T_i = H E(e_{k+i} v_k^T) + E(w_{k+i} e_k^T) H^T + E(w_{k+i} w_k^T)$$

soit :

$$T_i = H E[e_{k+i} L^T(y_k, y_{k-1} \dots)] + E(w_{k+i} e_k^T) + E(w_{k+i} w_k^T)$$

* Si $i \neq 0$, on a, en utilisant les remarques précédentes :

$$E(w_{k+i} w_k^T) = 0$$

$$E(w_{k+i} e_k^T) = 0$$

$$E[e_{k+i} L^T(y_k, y_{k-1} \dots)] = 0 \quad (\text{principe d'orthogonalité de l'estimation linéaire optimale})$$

Donc, si $i \neq 0$, $T_i = 0$

* Si $i = 0$, on reprend l'expression de T_i :

$$T_0 = E(v_k v_k^T) = E[(H e_k + w_k)(H e_k + w_k^T)]$$

En utilisant le fait que e_k et w_k sont indépendants, il vient :

$$T_0 = H M H^T + R$$

1.6.3 - Forme filtre d'un modèle markovien

Etant donné un processus à représentation markovienne $\{y_k\}$, on peut mettre en oeuvre un filtre de Kalman optimal stationnaire d'équation :

$$\begin{cases} x_{k+1/k} = F x_{k/k-1} + L v_k \\ v_k = y_k - H x_{k/k-1} \end{cases}$$

En écrivant différemment ces équations, on obtient :

$$\begin{cases} x_{k+1/k} = F x_{k/k-1} + L v_k \\ y_k = H x_{k/k-1} + v_k \end{cases}, \text{ soit, en posant } x_{k/k-1} = \hat{x}_k$$

$$(6.3.1) \quad \begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_k + L v_k \\ y_k = H \hat{x}_k + v_k \end{cases} \quad \text{avec } (F-LH) \text{ asymptotiquement stable}$$

où v_k est une séquence blanche centrée, de variance covarianance T_0 , d'après 1.6.2.

Le modèle (6.3.1) a la forme générale des modèles markoviens (2.1) page 3, et sera appelé "forme filtre" du processus $\{y_k\}$.

Les matrices (Q, R, S) de la forme générale sont ici respectivement

$$(L T_0 L^T, T_0, L T_0)$$

Dans le cadre de notre étude, nous rechercherons les modèles minimaux sous forme filtre, car, outre l'unicité, ils présentent le caractère fondamental suivant :

$$H \hat{x}_k = E(y_{k/k-1, k-2} \dots)$$

1.7 - PROPRIETES DES FORMES FILTRE

Nous supposons dans toute la suite que la fonction de corrélation $\{A_i\}$ du processus y_k présente un caractère strictement positif réel, c'est-à-dire que la matrice A est strictement définie positive. Le fait de considérer A strictement définie positive n'enlève rien à la généralité de l'étude.

Considérons en effet une sortie $\{y_i\}$ dont certaines composantes dépendent linéairement des autres. Alors, on pourrait écrire :

$$y_i = C y_i' \text{ avec } C \text{ matrice } m \times r \text{ et } r < m$$

Dans ce cas $A_0 = C A_0' C^T$ serait certainement singulière ($r < m$) et donc A ne serait pas strictement définie positive.

Nous écartons le cas où toutes les composantes de y_i ne sont pas linéairement indépendantes.

Nous allons établir deux propriétés intéressantes de la forme filtre dans ce cas :

1.7.1 - La variance de l'innovation est strictement définie positive

Soit un modèle sous la forme filtre (minimal ou non)

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_k + L v_k \\ y_k = H \hat{x}_k + v_k \end{cases}$$

$$\text{Soit } T_0 = E(v_k v_k^T)$$

T_0 matrice ($m \times m$) symétrique, peut se factoriser :

$$T_0 = \Gamma \Gamma^T \text{ où } \Gamma \text{ est une matrice } (m \times r), r \text{ étant le rang de } T_0.$$

On peut alors poser $v_k = \Gamma \varepsilon_k$, ε_k est une séquence blanche centrée, avec $E(\varepsilon_k \varepsilon_k^T) = \mathbb{1}_r$ (matrice unité $r \times r$)

Alors, en désignant par $\{B_0, B_1, B_2 \dots\}$ la séquence de pondération du modèle considéré, on peut écrire :

$$y_k = B_0 v_k + B_1 v_{k-1} + \dots, \text{ soit :}$$

$$y_k = B_0 \Gamma \varepsilon_k + B_1 \Gamma \varepsilon_{k-1} + \dots$$

De même :

$$y_{k-1} = B_0 \Gamma \varepsilon_{k-1} + B_1 \Gamma \varepsilon_{k-2} + \dots$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ y_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \dots \\ & B_0 & B_1 & \dots \\ & & B_0 & B_1 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ \varepsilon_{k-1} \\ \varepsilon_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ \varepsilon_{k-1} \\ \varepsilon_{k-2} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Alors :

$$A^T = E \left(\begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k^T & y_{k-1}^T & \dots \end{bmatrix}^T \right) = B \begin{bmatrix} \Gamma & & \\ & \Gamma & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{1}_r & & \\ & \mathbb{1}_r & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma^T & & \\ & \Gamma^T & \\ & & \ddots \end{bmatrix} B^T$$

Il est alors évident que si Γ est de dimension $(r \times m)$ avec $r < m$, A^T ne peut pas être définie positive.

Donc, si la suite $\{A_i\}$ est de type strictement réel positif, la variance-covariance de l'innovation est définie positive.

1.7.2 - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un modèle filtre soit minimal est que le triplet $(H \ F \ L)$ soit commandable et observable

* Condition nécessaire

Soit un modèle minimal. Si $(H \ F \ L)$ n'était pas commandable et observable, on pourrait réduire ce modèle à sa partie commandable et observable, et on obtiendrait ainsi un modèle de taille inférieure, ce qui est contraire à l'hypothèse de minimalité.

* Condition suffisante

Soit un modèle (H F L) commandable et observable.

A étant définie positive, T_0 est définie positive (propriété 1.7.1).

Nous allons montrer qu'il n'existe pas de modèle de taille inférieure.

Pour cela, supposons qu'il en existe un : $(H' F' L' T'_0)$. On a, d'après la propriété 1.7.1, T'_0 définie positive.

Ecrivons parallèlement les équations des deux modèles :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = F \hat{x}_k + L v_k \\ y_k = H \hat{x}_k + v_k \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x}'_{k+1} = F \hat{x}'_k + L' v'_k \\ y_k = H' \hat{x}'_k + v'_k \end{cases}$$

On peut développer ces équations récurrentes :

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= H \hat{x}_{k+1} + v_{k+1} & = y_{k+1} &= H' \hat{x}'_{k+1} + v'_{k+1} \\ y_{k+2} &= H F \hat{x}_{k+1} + H L v_{k+1} + v_{k+2} & = y_{k+2} &= H' F' \hat{x}'_{k+1} + H' L' v'_{k+1} + v'_{k+2} \\ y_{k+3} &= H F^2 \hat{x}_{k+1} + H F L v_{k+1} + H F v_{k+2} + v_{k+3} & = y_{k+3} &= H' F'^2 \hat{x}'_{k+1} + H' F' L' v'_{k+1} + H' F' v'_{k+2} + v'_{k+3} \end{aligned}$$

Mais, selon la propriété fondamentale de forme filtre :

$$\begin{aligned} E(y_{k+1/k}) &= H \hat{x}_{k+1} = H' \hat{x}'_{k+1} \\ E(y_{k+2/k}) &= H E(x_{k+2/k}) = H F \hat{x}_{k+1} = H' F' \hat{x}'_{k+1} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Les égalités précédentes se réduisent donc à :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v'_{k+1} \\ H L v_{k+1} + v_{k+2} &= H' L' v'_{k+1} + v'_{k+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

En écrivant la première de ces égalités, pour tout k, il vient :

$$v_k = v'_k \quad \text{pour tout } k$$

Donc, sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ H L & 1 & & \\ H F L & H L & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k+1} \\ v_{k+2} \\ v_{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ H' L' & 1 & & \\ H' F' L' & H' L' & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_{k+1} \\ v'_{k+2} \\ v'_{k+3} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

On multiplie à droite les deux termes par $[v_{k+1}^T \ v_{k+2}^T \ \dots]$ et on prend l'espérance mathématique :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ H L & 1 \\ H F L & H L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ & T_0 \\ & & T_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ H' L' & 1 \\ H' F' L' & H' L' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ & T_0 \\ & & T_0 \end{bmatrix}$$

La matrice T_0 est définie positive, et on peut simplifier :

Donc

$$\begin{bmatrix} 1 \\ H L & 1 \\ H F L & H L & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ H' L' & 1 \\ H' F' L' & H' L' & 1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{bmatrix} H L = H' L' \\ H F L = H' F' L' \\ H F^2 L = H' F'^2 L' \\ \vdots \end{bmatrix}$$

D'où, en posant :

$$H = \begin{bmatrix} H L & H F L & H F^2 L & \dots \\ H F L & H F^2 L & H F^3 L & \\ H F^2 L & \dots & \dots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$$H' = \begin{bmatrix} H' L' & H' F' L' & H' F'^2 L' & \dots \\ H' F' L' & H' F'^2 L' & \dots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

On a bien évidemment :

$$H = H'$$

On remarque que H a la forme d'une matrice de Hankel, dont (HFL) est une factorisation commandable et observable. Donc (cf. théorie de l'algorithme de HO) (HFL) est une factorisation minimale de H .

Et, comme $H = H'$, $(H' F' L')$ est une autre factorisation (quelconque) de H , mais de taille surement supérieure ou égale à (H F L).

Par conséquent, l'hypothèse d'existence d'un modèle de taille inférieure à (HFL) est impossible, ce qui achève la démonstration de la propriété

Conséquence importante

En rapprochant ce résultat du théorème (1.4), il est clair que les conditions :

(H F G) commandable et observable
(H F L) commandable et observable
(H F L T ₀) minimal

sont équivalentes.

En effet :

(H F G) commandable et observable $\Rightarrow$ (H F Q R S) existe et est minimal $\Rightarrow$ le filtre (H F L T₀) est minimal $\Rightarrow$ (H F L) commandable et observable.

Réciproquement,

(HFL) commandable et observable $\Rightarrow$ (HFLT₀) minimal $\Rightarrow$ (HFG) minimal*
 $\Rightarrow$ (HFG) commandable et observable

1.8 - PROPRIETE CARACTERISTIQUE DES MODELES-FILTRE MINIMAUX

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un modèle-filtre observable soit minimal est que $P = E (\hat{x}_k \hat{x}_k^T)$ soit strictement définie positive.

Démonstration :

(FL) commandable $\Rightarrow$ P définie positive

En effet, si P était singulière, on pourrait la mettre sous la forme $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ par un changement de base, et (FL) ne serait pas commandable.

P définie positive $\Rightarrow$ (FL) commandable

En effet, si (FL) n'était pas commandable, les états non commandables donneraient à P la forme $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.9 - RESUME DU CHAPITRE D'INTRODUCTION

Nous allons reprendre sous forme de tableaux toutes les propriétés exposées précédemment :

* si HFG n'était pas minimal, il existerait un modèle de taille inférieure (cf. th. 1.4).

Chapitre 2

ALGORITHME DE FAURRE

La méthode présentée dans ce chapitre est inspirée de la thèse de P. FAURRE. Toutefois l'algorithme de calcul résultant est obtenu à la suite d'une démonstration originale.

2.1 - POSITION DU PROBLEME

Soit un processus $\{y_k\}$ vectoriel de dimension m , à représentation markovienne, dont on supposera connue, du moins lors de l'étude théorique, la fonction de corrélation $\{A_0, A_1 \dots A_i \dots\}$ de type réel positif.

On recherche un modèle filtre minimal :

$$1.1 \quad \begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + Lv_k \\ y_k = Hx_k + v_k \end{cases} \quad \text{avec } (F-LH) \text{ asymptotiquement stable}$$

2.2 - PRINCIPE DE LA METHODE

2.2.1 - Partie préliminaire

On rappelle les notations

$$\begin{aligned} T_0 &= E \begin{pmatrix} v_k & v_k^T \end{pmatrix} \\ P &= E \begin{pmatrix} x_k & x_k^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad T_0 \text{ et } P \text{ sont évidemment symétriques}$$

et les équations :

$$2.1 \quad P = FPF^T + LT_0L^T$$

$$2.1 \quad A_0 = HPH^T + T_0$$

$$2.3 \quad A_i = HF^{i-1}G \quad \text{pour } i \geq 1$$

$$2.4 \quad G = FPH^T + LT_0$$

avec les conditions

P strictement définie positive (propriété 1.8)

$$\begin{bmatrix} LT_0L^T & LT_0 \\ T_0^TL^T & T_0 \end{bmatrix} \text{ semi définie positive}$$

* Mise en forme du problème

Recherchant les matrices (H, F, L, T_0) , on commence par calculer les matrices (H, F, G) vérifiant les hypothèses du théorème 1.4 :

$$HF^{i-1}G = A_i \quad \text{pour } i \geq 1$$

(H, F, G) commandable et observable.

Pour celà, on applique l'algorithme de HO à la suite $\{A_1, A_2, \dots\}$

Le théorème 1.4 assure alors l'existence et la minimalité du modèle (1.1) qu'il reste à déduire de (H, F, G, A_0) .

A cet effet, nous allons établir une équation permettant de calculer P , à partir de (H, F, G, A_0) , puis on déduira les valeurs de L et T_0

On a :

$$(2.2) \iff (2.5) \quad T_0 = A_0 - HPH^T$$

$$(2.4) \iff (2.6) \quad LT_0 = G - FPH^T$$

En rappelant que T_0 est strictement définie positive (cf.1.7.1) l'équation (2.6) devient :

$$L = (G - FPH^T) T_0^{-1}$$

Alors, en utilisant (2.5) :

$$L = (G - FPH^T) (A_0 - HPH^T)^{-1}$$

En employant cette expression de L et celle de T_0 , l'équation (2.1) s'écrit :

$$(2.7) \quad P = FPF^T + (G - FPH^T) (A_0 - HPH^T)^{-1} (G - FPH^T)^T$$

On voit donc apparaître une équation (2.7) du type lyapounov discret, qu'il est habituel de résoudre en cherchant le régime stationnaire de l'équation récurrente

$$\begin{cases} P_{n+1} = FP_n F^T + (G - FP_n H^T) (A_0 - HP_n H^T)^{-1} (G - FP_n H^T)^T \\ P_0 = 0 \end{cases}$$

où apparaissent uniquement les quantités connues (H, F, G, A_0)

Nous allons établir la convergence d'une telle récurrence.

2.2.2 - Algorithme de calcul

La méthode proposée consiste à trouver une équation récurrente dont la solution stationnaire soit la solution unique définie positive de l'équation 2.7 (l'unicité et la définie positivité de P sont assurées car l'équation 2.6 est une équation de lyapounov).

Considérons le modèle (1.1) que nous rappelons :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + Lv_k \\ y_k = Hx_k + v_k \end{cases}$$

On peut toujours envisager d'appliquer un filtre de Kalman à ce système.

Considérons le filtre optimal non stationnaire

On pose :

$$\Sigma_{k+1} = E [(x_{k+1/k} - x_{k+1}) (x_{k+1/k} - x_{k+1})^T]$$

(Σ_{k+1} est la covariance de l'erreur de prédiction de x_{k+1})

Il résulte des équations classiques du filtrage que la suite $\{\Sigma_n\}$ vérifie l'équation récurrente suivante :

$$(2.10) \quad \Sigma_{n+1} = F \Sigma_n F^T - (F \Sigma_n H^T + L T_0) (H \Sigma_n H^T + T_0)^{-1} (F \Sigma_n H^T + L T_0)^T + L T_0 L^T$$

On sait d'autre part, que $\{\Sigma_n\}$ converge avec certitude vers zéro car le modèle (1.1) est une forme filtre, c'est-à-dire un filtre optimal stationnaire.

Définissons alors la suite $\{\Pi_n\}$ par :

$$(2.20) \quad \Pi_n = P - \Sigma_n$$

Rappelons (2.30)

$$P = F P F^T + L T_0 L^T$$

En retranchant membre à membre (2.30) et (2.10), il vient :

$$(2.40) \quad \Pi_{n+1} = F \Pi_n F^T + (F \Sigma_n H^T + L T_0) (H \Sigma_n H^T + T_0)^{-1} (F \Sigma_n H^T + L T_0)^T$$

que l'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1} &= F \Pi_n F^T + (F \Sigma_n H^T - F P H^T + F P H^T + L T_0) (H \Sigma_n H^T - H P H^T + H P H^T + T_0)^{-1} \\ &\quad (F \Sigma_n H^T - F P H^T + F P H^T + L T_0)^T \end{aligned}$$

En rappelant alors que :

$$\begin{aligned} G &= F P H^T + L T_0 \\ A_0 &= H P H^T + T_0 \end{aligned}$$

On a :

$$\Pi_{n+1} = F \Pi_n F^T + (F(\Sigma_n - P) H^T + G) (H(\Sigma_n - P) H^T + A_0)^{-1} [F(\Sigma_n - P) H^T + G]^T$$

Soit en utilisant la définition (2.20) :

$$(2.50) \quad \Pi_{n+1} = F \Pi_n F^T + (-F \Pi_n H^T + G) (-H \Pi_n H^T + A_0)^{-1} (-F \Pi_n H^T + G)^T$$

Noter que cette récurrence est entièrement définie par la donnée A_0 et des matrices H, F, G résultant de l'algorithme de HO. On remarque au passage que Π_n est définie positive si Π_0 est définie non négative.

D'autre part, $\{\Sigma_n\}$ convergeant vers zéro, Π_n converge vers P , d'après les définitions (2.20).

Ce résultat est vérifié par le fait que si l'on prend $\Pi_{n+1} = \Pi_n = \Pi$ dans l'équation (2.50), on retrouve l'équation (2.7) vérifiée par P .

L'unicité et la définie positivité de P permettent de prendre une initialisation quelconque définie non négative de Π_0 , et en particulier $\Pi_0 = 0$.

L'équation (2.50) constitue bien un algorithme de calcul de P , car les matrices (A_0, H, F, G) sont connues.

A la convergence de (2.50) on aura :

$$P = \Pi_\infty$$

Puis :

$$\begin{aligned} T_0 &= A_0 - HPH^T \\ L &= (G - FPH^T) T_0^{-1} \end{aligned}$$

2.3 - CONCLUSION DE L'ETUDE THEORIQUE

La méthode présentée a un caractère essentiellement hors ligne, puisqu'elle nécessite la connaissance préalable de la fonction de corrélation du processus à identifier. Elle permet de déterminer tous les paramètres du modèle filtre minimal cherché, et on est assuré de l'existence et de l'unicité (à un changement de base près) de la solution.

2.4 - MODALITES PRATIQUES D'UTILISATION

Soit un processus aléatoire $\{y_k\}$ dont on cherche à identifier la forme filtre minimale.

Généralement, on ne dispose que d'un échantillon $\{y_k\}$, ($k = 1, \dots, N$) qui nous permet de calculer une approximation $\{A'_0, A'_1, \dots, A'_{i_{\max}}\}$ de la fonction de corrélation $\{A_0, \dots, A_{i_{\max}}\}$ exacte.

2.4.1 - Caractère positif réel de la fonction de corrélation expérimentale

Etant donné l'échantillon fini $\{y_k\}$, ($k = 1, 2, \dots, N$) on dispose de plusieurs méthodes possibles pour calculer $\{A'_i\}$ ($i = 0, 1, \dots, i_{\max}$) [cf. Ph. DE LARMINAT : Processus Stochastiques]. Il faut choisir d'une part une méthode permettant une précision satisfaisante, mais d'autre part il faudra que $\{A'_i\}$ soit de type réel positif.

Calculons alors $Y Y^T$, qui est par définition définie positive si $\{y_k^1\} \neq \{y_k^2\}$

Ce produit des matrices sera effectué par blocs (2×2)

En remarquant que :

$$\begin{bmatrix} y_k^1 & 0 \\ y_k^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\ell^1 & y_\ell^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k^1 & y_\ell^2 \\ y_k^2 & y_\ell^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \end{bmatrix} [y_\ell^1 \ y_\ell^2] = y_k y_\ell^T$$

Il vient :

$$Y Y^T = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N y_k y_k^T & \sum_{k=2}^N y_k y_{k-1}^T & \dots & \sum_{k=i \max+1}^N y_k y_{k-i \max}^T \\ & \sum_{k=1}^N y_k y_k^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=1}^N y_k y_k^T \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\frac{1}{N} Y Y^T = \begin{bmatrix} A_0' & A_1' & \dots & A_{i \max}' \\ A_1^T & A_0' & & A_1' \\ & & \ddots & \\ & & & A_1^T & A_0' \end{bmatrix} \quad \text{définie positive.}$$

2.4.2 - Emploi de l'algorithme de HO

L'algorithme de HO est appliqué à la suite finie $\{A_i'\}$ $i = 1, \dots, i_{\max}$:
 Les matrices $(H''F''G'')$ qui en résultent sont une approximation des matrices $(H'F'G')$ qui résulteraient de l'application de l'algorithme de HO à la suite infinie $\{A_i'\}$ (différente de $\{A_i''\}$). Il faudra alors s'assurer que la suite $\{A_0', A_1'', A_2'', \dots, A_{i_{\max}}''\}$ a elle aussi un caractère positif réel (par calcul des valeurs propres de A par exemple)
 (Les matrices A_i'' sont obtenues par $A_i'' = H''F''^{i-1}G''$ pour $i \geq 1$)

C'est ce critère de définie positivité qui fixera le choix de la dimension du modèle.

En effet, suivant la précision recherchée lors de la mise en oeuvre de l'algorithme de HO, on obtient des modèles de taille croissante. On retiendra le premier modèle (H, F, G) tel que la suite $\{A_0', A_1'', \dots, A_{i_{\max}}''\}$ ait un caractère positif réel.

S'il n'existe pas un tel modèle (H, F, G) l'algorithme de FAURRE n'a donc aucun résultat.

2.4.3 - Algorithme de FAURRE

Les conditions étant remplies, on est certains de la convergence de l'algorithme de FAURRE vers une approximation du gain du filtre optimal et de la variance de l'innovation.

Calcul pratique de la fonction de corrélation

La méthode employée permet de calculer $\{A_i'\}$ en temps réel, sans mémorisation de l'échantillon complet $\{y_k\}$. Bien que cette formulation temps réel ne présente aucune difficulté, nous explicitons néanmoins les calculs.

$$\text{Posons } A_i'(p) = \frac{1}{p} \sum_{k=i+1}^p y_k y_{k-i}^T \quad \text{Alors } A_i'(N) = A_i' \quad (\text{pour } i = 0, 1, \dots, i_{\max})$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} A_i'(p+1) &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=i+1}^{p+1} y_k y_{k-i}^T = \frac{1}{p+1} \left[\sum_{k=i+1}^p y_k y_{k-i}^T + y_{p+1} y_{p-i+1}^T \right] \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{k=i+1}^p y_k y_{k-i}^T + \frac{1}{p+1} y_{p+1} y_{p-i+1}^T + \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{k=i+1}^p y_k y_{k-i}^T}_{A_i'(p)} - \frac{1}{p} \sum_{k=i+1}^p y_k y_{k-i}^T \\ &= A_i'(p) + \frac{1}{p+1} y_{p+1} y_{p-i+1}^T + \sum_{k=i+1}^p y_k y_{k-i}^T \left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \right) \\ &\quad - \frac{1}{p+1} A_i'(p) \end{aligned}$$

$$A_i'(p+1) = A_i'(p) + \frac{1}{p+1} [A_i'(p) + y_{p+1} y_{p+1-i}^T]$$

Cette formule permet donc un calcul récurrent de $A_i'(N)$, par ajustement de $A_i'(p)$ à chaque acquisition de y_p pour $p = 1, 2 \dots N$

Conclusion

Les résultats numériques, ainsi que les possibilités offertes par la méthode de FAURRE seront envisagés dans la deuxième partie de ce travail (étude expérimentale).

On peut noter néanmoins que l'exigence du caractère positif réel de $H''F''G''$ est un handicap certain. En effet, même si F et H sont données à priori (supposées exactes), la matrice G'' résultant de l'ajustement de $H F^{i-1} G''$ à la suite A_i' ($i = 1, 2, \dots$) ne sera pas nécessairement telle que la suite $A_0'', A_1'', A_2'' \dots$ (où $A_i'' = H F^{i-1} G''$) soit de type positif réel.

Il serait alors souhaitable d'ajuster G'' compte tenu de la contrainte que $A_0'', A_1'', A_2'' \dots$ soit de type positif réel, où encore réajuster pour cela A_0' après détermination de $F'' G'' H'' \dots$

Malheureusement, nous n'avons pas connaissance de solution agréable pour ce type de problème.

Chapitre 3

EXTENSION DE LA METHODE DE MEHRA

La méthode proposée dans ce chapitre est inspirée par l'article de R.K. MEHRA [3]. Notre contribution a consisté à modifier l'algorithme original, en évitant ainsi certaines hypothèses restrictives inhérentes à la méthode initiale (régularité de la matrice de transition, indépendance des bruits état-sortie) dont on trouvera une étude détaillée dans [4].

Le principe fondamental consiste à mettre en oeuvre un filtre stationnaire non optimal (de gain L_0), et à calculer l'innovation issue de ce filtre (L_0). On modifie ensuite le gain L_0 à l'aide de la fonction de corrélation de l'innovation, et on obtient un gain L_1 ; on calcule l'innovation issue du filtre (L_1), et on obtient L_2 , et ainsi de suite. Il est montré que la suite des gains $L_0, L_1, \dots$ converge vers le gain optimal, l'innovation devenant alors une séquence blanche.

Il apparaît immédiatement que cette méthode nécessite un volume de calcul assez important, puisqu'il sera nécessaire de calculer la fonction de corrélation de l'innovation à chaque itération.

Par contre, aucun caractère préalable de définie-positivité n'est à respecter.

3.1 - POSITION DU PROBLEME

Cette méthode s'inscrit dans le cadre général de notre travail, car elle consiste à trouver une réalisation-filtre minimale d'un processus à représentation markovienne y_k , connu par un échantillon $\{y_k\}$ (supposé de longueur infinie lors de l'étude théorique).

[3] R.K. MEHRA "on the identification of variances and adaptive KALMAN filtering"

IEEE - Vol. AC15, n°2, April 70, pp. 175.184

[4] C.DONCARLI "estimation des caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire stationnaire"

D.E.A. Laboratoire d'automatique E.N.S.M. NANTES septembre 70

Nous supposerons connues :

- la dimension minimale (inconnue dans la méthode de FAURRE)
- les matrices F et H, avec (HF) observable.

Les matrices F et H sont :

- soit données à priori
- soit issues d'un calcul (algorithme de HO).

Dans ce dernier cas, la matrice G n'est plus réutilisée par la suite.

On pose donc le problème suivant :

- Etant donné un échantillon $\{y_k\}$
- Etant donné H et F avec (HF) observable
- Trouver un modèle filtre (L, T_o)

3. 2 - RAPPELS SUR LE FILTRAGE

Nous présentons tout d'abord quelques résultats classiques concernant le filtrage, optimal ou non, qui sont rappelés ici sans démonstration

- Soit le modèle observable et commandable

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + v_k \\ y_k = Hx_k + w_k \end{cases}$$

On rappelle $E\left\{\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_j \\ w_j \end{bmatrix}^T\right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta(i-j)$

- Soit un filtre stationnaire stable, défini par le gain L.
- Ce filtre admet pour équations :

$$2.1 \quad \begin{cases} x_{k+1/k} = Fx_{k/k-1} + Lv_k \\ v_k = y_k - Hx_{k/k-1} \end{cases}$$

où

$x_{k+1/k}$ est l'estimation de x_{k+1} sur la base de $\{y_k, y_{k-1}, \dots\}$

v_k est l'innovation

On définit l'erreur d'estimation

$$l_k = x_k - x_{k/k-1}$$

On pose

$$M_k = E(l_k l_k^T)$$

En régime stationnaire, $\underline{M}$ est solution de l'équation

$$(2.2) \quad \underline{M} = (\underline{F} - \underline{L}\underline{H}) \underline{M} (\underline{F} - \underline{L}\underline{H})^T - \underline{S}\underline{L}^T - \underline{L}\underline{S}^T + \underline{L}\underline{R}\underline{L}^T + \underline{Q}$$

* Filtre optimal

Le filtre est optimal si

trace ($\underline{M}$) minimum

Dans cas, $\underline{M}_{opt}$ et $\underline{L}_{opt}$ sont solution des équations

$$(2.3) \quad \underline{M}_{opt} = \underline{F}\underline{M}_{opt}\underline{F}^T - \underline{L}_{opt}(\underline{H}\underline{M}_{opt}\underline{F}^T + \underline{S}^T) + \underline{Q}$$

$$(2.4) \quad \underline{L}_{opt} = (\underline{F}\underline{M}_{opt}\underline{H}^T + \underline{S})(\underline{H}\underline{M}_{opt}\underline{H}^T + \underline{R})^{-1}$$

3.3 - DEFINITION D'UNE SUITE DE GAINS CONVERGEANT VERS $\underline{L}_{opt}$

Considérons un gain $\underline{L}_0$ quelconque, tel que le filtre défini par (2.1) soit stable.

Soit $\underline{M}_0$ la covariance de l'erreur d'estimation, donnée par la solution de l'équation (2.2) dans laquelle $\underline{L} = \underline{L}_0$

$$(3.1) \quad \underline{M}_0 = (\underline{F} - \underline{L}_0\underline{H}) \underline{M}_0 (\underline{F} - \underline{L}_0\underline{H})^T - \underline{S}\underline{L}_0^T - \underline{L}_0\underline{S}^T + \underline{L}_0\underline{R}\underline{L}_0^T + \underline{Q}$$

On définit alors $\underline{L}_1$ par l'égalité suivante (à rapprocher de 2.4)

$$(3.2) \quad \underline{L}_1 = (\underline{F}\underline{M}_0\underline{H}^T + \underline{S})(\underline{H}\underline{M}_0\underline{H}^T + \underline{R})^{-1}$$

A partir de $\underline{L}_1$ on calcule $\underline{M}_1$, puis on définit de même $\underline{L}_2$ puis $\underline{M}_2, \underline{L}_3 \dots$ etc.

Nous reviendrons plus loin sur la convergence locale de la suite $\{\underline{L}_0, \underline{L}_1 \dots\}$ dont la convergence globale a été établie [5] par R.E. KALMAN.

3.4 - PRINCIPE DE LA METHODE

Les expressions (3.1) et (3.2) ne permettent pas encore de définir un algorithme de calcul de $\underline{L}_{opt}$, car les matrices $\underline{Q}, \underline{R}, \underline{S}$ ne sont pas connues.

On établit donc des formules "de remplacement" permettant de calculer la suite $\{\underline{L}_0, \underline{L}_1 \dots\}$ à partir d'expressions ne faisant plus intervenir $\underline{Q}, \underline{R}, \underline{S}$ mais la fonction de corrélation $\underline{T}_1$ de l'innovation $\underline{v}_k$, cette fonction

[5] R.E. KALMAN "New methods and results in linear prediction and filtering theory"

pouvant être obtenue expérimentalement en mettant en oeuvre les filtres $L_0, L_1, \dots$

Ces formules "de remplacement" se déduisent des propriétés de l'innovation.

3.5 - PROPRIETES DE L'INNOVATION

Rappelons en la définition :

$$v_k = y_k - Hx_{k/k-1}$$

3.5.1 - Cas optimal $L = L_{opt}$

On rappelle (cf 1.6.2) que l'innovation est une séquence blanche centrée de variance-covariance.

$$5.2 \quad T_0 = E(v_k v_k^T) = H M_{-opt} H^T + R$$

3.5.2 - Cas non optimal $L = L_0$

Montrons que l'innovation est une séquence centrée dont la fonction de corrélation est donnée par les formules suivantes :

$$5.6 \quad T_0 = H M_0 H^T + R$$

$$5.7 \quad T_i = H (F - L_0 H)^{i-1} (F M_0 H^T + S - L_0 T_0)$$

Démonstrations :

Pour $i = 0$ le calcul effectué dans le cas optimal s'applique encore :

$$T_0 = E(v_k v_k^T) = H M_{-0} H^T + R$$

On rappelle la définition de l'erreur d'estimation

$$e_k = x_k - x_{k/k-1}$$

alors :

$$v_k = y_k - Hx_{k/k-1}$$

soit en utilisant :

$$y_k = Hx_k + w_k$$

il vient :

$$v_k = H(x_k - x_{k/k-1}) + w_k$$

ou encore :

$$v_k = H e_k + w_k$$

On a donc :

$$E (v_k v_{k-i}^T) = E [(H l_k + w_k) (H l_{k-i} + w_{k-i})^T]$$

soit, en utilisant les remarques d'indépendance :

$$(5.8) \quad E (v_k v_{k-i}^T) = H E (l_k l_{k-i}^T) H^T + H E (l_k w_{k-i}^T)$$

On peut, d'autre part, établir rapidement l'équation suivante :

$$(5.9) \quad l_k = (F - L_o H)^i l_{k-i} - \sum_{j=1}^i (F - L_o H)^{j-1} L_o w_{k-j} + \sum_{j=1}^i (F - L_o H)^{j-1} v_{k-j}$$

* On multiplie alors (5.9) par l_{k-i}^T à droite, et on prend l'espérance :

Il vient

$$E (l_k l_{k-i}^T) = (F - L_o H)^i M_o$$

en effet

$$\begin{bmatrix} w_{k-1} \\ \vdots \\ w_{k-i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} v_{k-1} \\ \vdots \\ v_{k-i} \end{bmatrix} \quad \text{sont indépendants de } l_{k-i} \text{ et seul le premier terme de l'équation (5.9) fournit une espérance non nulle.}$$

* On multiplie ensuite (5.9) par w_{k-i}^T à droite, et on prend l'espérance

$$E (l_k w_{k-i}^T) = E \left\{ \left[(F - L_o H)^{i-1} l_{k-i} - \sum_{j=1}^{i-1} (F - L_o H)^{j-1} L_o w_{k-j} + \sum_{j=1}^{i-1} (F - L_o H)^{j-1} v_{k-j} \right] w_{k-i}^T \right\}$$

En utilisant les remarques d'indépendance, il ne subsiste que deux termes dans l'équation précédente ($j=i$)

et on a

$$E (l_k w_{k-i}^T) = - (F - L_o H)^{i-1} L_o R + (F - L_o H)^{i-1} S$$

Donc, en reprenant 5.8

$$(5.10) \quad E (v_k v_{k-i}^T) = H (F - L_o H)^{i-1} [F M_o H^T + S - L_o (H M_o H^T + R)]$$

3.5.3 - Remarque

Nous avons établi que si le filtre est optimal, l'innovation est une séquence blanche.

Réciproquement, montrons que si l'innovation est blanche, le filtre est optimal. Cette réciproque est importante, car elle permet de déduire que la "blancheur" de l'innovation est un critère d'optimalité du filtre.

Démonstration

Prenons pour hypothèse

$$E (v_k v_{k-i}^T) = 0 \text{ pour } i \neq 0$$

Alors, en utilisant (5.10)

$$H (F - L_o H)^{i-1} [FM_o H^T + S - L_o (HM_o H^T + R)] = 0, \text{ pour tout } i \neq 0$$

Donc,

$$FM_o H^T + S - L_o (HM_o H^T + R) = 0^*$$

Soit

$$L_o = (FM_o H^T + S) (HM_o H^T + R)^{-1}$$

Donc L_o vérifie l'équation du cas optimal (2.4) et donc $L_o = L_{opt}$

3.6 - EXPRESSION DE L_1 EN FONCTION DE LA CORRELATION DE L'INNOVATION DEFINIE PAR L_o

Soit L_o gain non optimal tel que $(F - L_o H)$ détermine un système stable. L'expression de L_1 (3.2) s'écrit, compte tenu de (5.2)

$$6.1 \quad L_1 = (FM_o H^T + S) T_o^{-1}$$

Remarque

Plus rigoureusement, il faudrait noter $T_o, T_{10}, T_{20}, \dots$ les corrélations de l'innovation engendrée par le filtre défini par L_o .

Notons X la grandeur inconnue $X = FM_o H^T + S$

* On trouvera dans 3.6 la démonstration du fait que la matrice

$$\begin{bmatrix} H \\ H (F - L_o H) \\ \vdots \\ H (F - L_o H)^{i-1} \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ est de rang maximum, ce qui permet d'écrire } FM_o H^T + S - L_o (HM_o H^T + R) = 0$$

Les valeurs de T_k (5.7) s'écrivent alors :

$$6.2 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = H (X - L_o T_o) \\ T_2 = H (F - L_o H) (X - L_o T_o) \\ \vdots \\ T_n = H (F - L_o H)^{n-1} (X - L_o T_o) \end{array} \right.$$

On reporte dans chaque équation la valeur précédente de T_i , et on obtient :

$$6.3 \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 = H (X - L_o T_o) \\ T_2 = H F X - H L_o T_1 - H F L_o T_o \\ \vdots \\ T_n = H F^{n-1} X - H L_o T_{n-1} - \dots - H F^{n-1} L_o T_o \end{array} \right.$$

Le système (6.3) peut encore s'écrire :

$$\begin{bmatrix} H \\ H F \\ \vdots \\ H F^{n-1} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} T_1 + H L_o T_o \\ T_2 + H L_o T_1 + H F L_o T_o \\ \vdots \\ T_n + H L_o T_{n-1} + \dots + H F^{n-1} L_o T_o \end{bmatrix}$$

La réalisation (1.1) étant minimale, la matrice $\begin{bmatrix} H \\ H F \\ \vdots \\ H F^{n-1} \end{bmatrix}$ est de rang maximum,

et le système (6.3) admet une solution unique X .

Les systèmes (6.2) et (6.3) sont équivalents. Donc, le système (6.2) admet lui aussi une solution unique X , ce qui entraîne que la matrice B_o ci-dessous est de rang maximum.

$$6.4 \quad B_o = \begin{bmatrix} H \\ H (F - L_o H) \\ \vdots \\ H (F - L_o H)^{n-1} \end{bmatrix}$$

En rappelant que l'équation (6.1) permet d'écrire $L_1 = X T_0^{-1}$, le système (6.2) peut s'écrire, en multipliant par T_0^{-1} à droite :

$$B_0 (L_1 - L_0) = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} T_0^{-1}$$

soit :

$$6.5 \quad B_0 L_1 = B_0 L_0 + \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} T_0^{-1}$$

La matrice B_0 étant de rang maximum, on peut calculer la solution L_1 du système (6.4) car les inconnues Q, R, S ont disparu de ces équations.

3.7 - ETUDE DE LA SUITE L_i

Il est montré [KALMAN] que la suite $\{L_i\}$ ainsi construite converge vers L_{opt} . Nous ne reprendrons pas cette démonstration; on peut toutefois vérifier immédiatement que si elle converge, elle converge vers L_{opt} .

En effet, si $L_{i+1} = L_i$

alors $\begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} = 0$

Après convergence, l'innovation est donc devenue une séquence blanche ce qui assure l'optimalité du filtre.

D'autre part, nous proposons une démonstration de la convergence de $\{L_i\}$ au voisinage de L_{opt} , démonstration qui fait apparaître que la convergence finale est quadratique.

Soit un modèle de $\{Y_k\}$

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + Lv_k \\ y_k = Hx_k + v_k \end{cases}$$

L gain du filtre optimal stationnaire
(on note L au lieu de L_{opt} pour alléger les notations).

Soit un filtre non optimal

$$\left| \begin{array}{l} \hat{x}_{k+1} = F\hat{x}_k + L_o \lambda_k \\ \lambda_k = y_k - H\hat{x}_k \end{array} \right. \quad \text{tel que } (F - L_o H) \text{ soit asymptotiquement stable}$$

Définissons ϵ_k , nul en régime stationnaire lorsque $L_o = L$

$$\epsilon_k = x_k - \hat{x}_k$$

on a

$$\epsilon_{k+1} = F\epsilon_k + Lv_k - L_o \lambda_k$$

Mais

$$\lambda_k = y_k - H\hat{x}_k = Hx_k + v_k - H\hat{x}_k = v_k + H(x_k - \hat{x}_k) = v_k + H\epsilon_k$$

Donc

$$\epsilon_{k+1} = F\epsilon_k + Lv_k - L_o [v_k + H\epsilon_k]$$

Soit

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_{k+1} = (F - L_o H) \epsilon_k + (L - L_o) v_k \\ \lambda_k = H \epsilon_k + v_k \end{array} \right.$$

En développant le système précédent, il vient :

$$(1) \quad \lambda_k = v_k + H(L - L_o)v_{k-1} + H(F - L_o H)(L - L_o)v_{k-1} + H(F - L_o H)^2(L - L_o)v_{k-3} + \dots$$

* Supposons que $L - L_o$ soit un infiniment petit, et choisissons cette différence comme infiniment petit principal.

Alors, en écrivant l'équation précédente pour le rang $k - 1$

$$\lambda_{k-1} = v_{k-1} + H(L - L_o)v_{k-2} + \dots$$

soit

$$(L - L_o) \lambda_{k-1} = (L - L_o) v_{k-1} + \text{termes du 2}^{\text{eme}} \text{ ordre.}$$

En utilisant cette remarque, on peut donc écrire (1)

$$\lambda_k = v_k + H(L - L_o)\lambda_{k-1} + H(F - L_o H)\lambda_{k-2} + \dots + \text{termes du 2}^{\text{eme}} \text{ ordre}$$

soit

$$\lambda_k = v_k + \sum_{i=1}^{\infty} H (F - L_o H)^{i-1} (L - L_o) \lambda_{k-i} + \text{termes du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre}$$

D'autre part, v_k est indépendant de $\lambda_{k-1} \lambda_{k-2} \dots$

Donc, pour $p \neq 0$

$$T_p = E(\lambda_k \lambda_{k-p})^T = \sum_{i=1}^{\infty} H (F - L_o H)^{i-1} (L - L_o) E(\lambda_{k-i} \lambda_{k-p}^T) + \text{termes du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre}$$

soit

$$(2) \quad T_p = \sum_{i=1}^{\infty} H(F - L_o H)^{i-1} (L - L_o) T_{p-i} + \text{termes du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre}$$

Il apparaît donc que T_p est un infiniment petit du 1^{er} ordre pour $p \neq 0$.

Donc $(L - L_o) T_{p-i}$ est un infiniment petit du 2^{ème} ordre, sauf pour $i = p$.

Alors la formule (2) s'écrit donc

$$T_p = H (F - L_o H)^{p-1} (L - L_o) T_o + \text{termes du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre.}$$

Donc en écrivant cette égalité pour tout p et en multipliant par T_o^{-1} à droite

$$\begin{bmatrix} H \\ H (F - L_o H) \\ \vdots \\ H (F - L_o H)^{p-1} \\ \vdots \end{bmatrix} (L - L_o) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_p \\ \vdots \end{bmatrix} T_o^{-1} + \text{termes du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre}$$

Soit, en reprenant les notations déjà employées

$$B_o (L - L_o) = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_p \\ \vdots \end{bmatrix} T_o^{-1} + \text{termes du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre}$$

Si on considère alors le gain suivant L_1 , défini par

$$B_o (L_1 - L_o) = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_n \end{bmatrix} T_o^{-1}$$

Soit, en retranchant les deux équations précédentes

$$B_o (L - L_1) = \text{termes du 2eme ordre}$$

Il est donc établi que la convergence de $\{L_i\}$ vers L est à caractère quadratique.

3.8 - FORMULATION DE L'ALGORITHME. MODALITES D'APPLICATION

Dans la pratique, nous ne pouvons pas atteindre les valeurs exactes des matrices $T_o T_1 \dots T_n$, car nous ne disposons pas d'un échantillon de longueur infinie de y_i .

Ne disposant que des valeurs approchées $\hat{T}_o \hat{T}_1, \dots, \hat{T}_n$ de la fonction de corrélation de l'innovation, on peut se proposer de résoudre le système (6.5) par moindres carrés.

Si l'on note B_o^* la pseudo-inverse de B_o

$$B_o^* = (B_o^T B_o)^{-1} B_o^T$$

le système (6.5) fournit la valeur

$$(7.1) \quad \hat{L}_1 = L_o + B_o^* \begin{bmatrix} \hat{T}_1 \\ \vdots \\ \hat{T}_n \end{bmatrix} \hat{T}_o^{-1}$$

Les équations (6.4) et (7.1) permettent de calculer la suite $\{L_o, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots\}$ à partir des fonctions de corrélation des innovations issues des filtrages successifs, et la convergence de cette suite $\{L_o, \hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots, \hat{L}_n, \dots\}$ n'est alors pas assurée. Toutefois, cette approximation de $\{L_i\}$ est d'autant meilleure, et donc la convergence de $\{\hat{L}_i\}$ d'autant plus probable, que la corrélation des innovations sera connue de façon précise. Pour cela, il faudra disposer d'un échantillon suffisamment long du processus.

3.9 - CONCLUSION

La méthode proposée permet d'identifier directement la forme filtre d'un processus markovien, sans avoir besoin de passer par une réalisation minimale

quelconque. Etant basée sur le calcul d'une fonction de corrélation, elle a un caractère hors-ligne, et nécessite un volume de calcul important, puisqu'il faut calculer la corrélation de l'innovation à chaque itération sur le gain, jusqu'à ce que celle-ci soit "blanche".

La convergence n'est pas assurée théoriquement, mais nous avons envisagé, en dehors du cadre de ce mémoire, d'autres extensions, correspondant à l'utilisation de toutes les fonctions de corrélations de l'innovation, ce qui, pensons nous, permettra d'obtenir un algorithme asymptotiquement efficace.

Chapitre 4

IDENTIFICATION PAR FILTRAGE NON LINEAIRE

4.1 - INTRODUCTION

Les méthodes exposées lors des chapitres 2 et 3 sont basées sur le calcul préalable d'une fonction de corrélation (sortie ou innovation). Elles ont donc un caractère essentiellement hors-ligne.

Par contre, l'identification par filtrage non linéaire peut-être effectuée en temps réel, et permet une estimation des caractéristiques statistiques des bruits d'état et de sortie par application d'un "filtre secondaire d'estimation des variances", proposé par Ph. DE LARMINAT [6].

Dans ce chapitre, après avoir rappelé ce qu'est l'identification par filtrage, nous donnerons le principe d'un filtre non linéaire, optimal ou sous optimal, et nous présenterons la mise en forme de cette méthode pour l'identification d'une forme filtre, à partir des matrices F et H, et d'un échantillon du processus.

4.2 - L'IDENTIFICATION PAR FILTRAGE

Considérons les systèmes linéaires, discrets, stationnaires, multi-variables, représentés par le modèle suivant :

$$(2.1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \alpha_k \\ y_k = Hx_k + \beta_k \end{cases}$$

où :

x_k = état du système

y_k = sortie

u_k = commande

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \\ \beta_k \end{array} \right.$ séquences gaussiennes, indépendantes, centrées, dont nous supposons connus les moments du deuxième ordre.

On désigne θ l'ensemble des coefficients à identifier (matrices A, B, C)

Définissons l'estimation optimale de θ à l'instant k :

$$\theta_{k/k} = E(\theta/k) \quad (\text{espérance de } \theta \text{ conditionnellement à } y_1 y_2 \dots y_k)$$

$\theta_{k/k}$ représente une estimation Bayésienne de θ pour toute fonction de coût quadratique.

Voulant identifier θ par filtrage, nous considérons θ comme une variable et nous introduisons son équation d'évolution :

$$(2.2) \quad \theta_{k+1} = \theta_k \quad (= \theta)$$

Si on note alors z_k , l'état augmenté

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix}$$

On peut écrire (2.1) et (2.2) sous la forme

$$2.3 \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{k+1} = f_k(z_k, \alpha_k) \\ y_k = g_k(z_k, \beta_k) \end{array} \right.$$

L'identification de θ peut alors être obtenue par l'intermédiaire de l'estimation de l'état augmenté z_k

$$\hat{z}_{k/k} = \text{Estimation de } z_k \text{ sur la base de } \{y_1 y_2 \dots y_k\}$$

Il s'agit donc bien de déterminer un filtre susceptible de réaliser cette opération.

4.3 - FILTRE NON LINEAIRE OPTIMAL ET SOUS OPTIMAL

Rappelons tout d'abord la notion d'optimalité d'un filtre (linéaire ou non).

Un filtre est dit optimal, si, et seulement si

$$\hat{z}_{k/k} = z_{k/k} = E(z_k/k) \quad (\text{espérance de } z_k \text{ conditionnellement à } y_1 y_2 \dots y_k)$$

La détermination d'un filtre optimal a été effectuée par KALMAN (1961) dans le cas de systèmes linéaires. Ici, les équations 2.3 ne sont plus linéaires (du fait des produits états-paramètres) et nous utilisons donc des techniques de résolution non linéaires.

Remarquons qu'un filtre non linéaire optimal ($\hat{z}_{k/k} = E(z_k/k)$) nécessite la résolution d'équations intégrales pour lesquelles il n'existe pas de solution générale explicite, et dont le traitement demande un volume de calcul prohibitif vis à vis de l'optique temps réel que nous avons choisi.

Nous sommes donc conduits à considérer des filtres non linéaires sous optimaux (où encore approximativement optimaux) qui consistent en l'emploi du filtrage linéaire de KALMAN, appliqué à une linéarisation des équations (2.3) autour d'une valeur "de référence". Ces filtres sont sous optimaux, en ce sens que les équations linéarisées représentent une approximation des équations réelles du système.

Un développement général de cette théorie a été effectué (entre autres) par Ph. DE LARMINAT [6.] et notre exposé se limitera au cas particulier de l'identification d'une forme filtre.

4.4 - IDENTIFICATION D'UNE FORME FILTRE

Nous rappelons les équations d'un modèle sous la forme filtre :

$$4.1 \quad \begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + Lv_k \\ y_k = Hx_k + v_k \end{cases}$$

où

x_k = état du système

y_k = sortie

L = gain du filtre de KALMAN prédicteur stationnaire

v_k = innovation de variance T_0

Les matrices F et H sont exactement connues.

Les matrices L et T_0 sont à identifier.

Nous supposons tout d'abord, pour la clarté des explications, que x , y et v sont scalaires, et, dans un premier temps, que la variance T_0 de v_k est connue.

4.4.1 - $T_0 = E(v_k^2)$ est connue

Reprenons les équations du modèle :

$$4.1.1 \quad \begin{cases} x_{k+1} = fx_k + l v_k \\ y_k = hx_k + v_k \end{cases}$$

Plaçons nous à l'instant k , et supposons connues les estimations :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k/k} \\ \hat{v}_{k/k} \\ \hat{l}_{k/k} \end{cases}$$

Nous allons décomposer les opérations permettant d'atteindre les estimations :

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1/k+1} \\ \hat{v}_{k+1/k+1} \\ \hat{l}_{k+1/k+1} \end{cases} \quad \text{compte tenu de l'information } y_{k+1}$$

On définit les erreurs d'estimation

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k/k} \\ \tilde{v}_{k/k} \\ \tilde{l}_{k/k} \end{cases} \quad \text{par les équations suivantes :}$$

$$4.1.2 \quad \begin{cases} x_k = \hat{x}_{k/k} + \tilde{x}_{k/k} \\ v_k = \hat{v}_{k/k} + \tilde{v}_{k/k} \\ l_k = \hat{l}_{k/k} + \tilde{l}_{k/k} \end{cases}$$

Avec ces notations, le système (4.1.1) s'écrit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f x_k + (\hat{\ell}_{k/k} + \tilde{\ell}_{k/k}) (\hat{v}_{k/k} + \tilde{v}_{k/k}) \\ y_k = h x_k + v_k \end{cases}$$

Nous nous intéressons à l'équation d'état, et nous la développons :

$$x_{k+1} = f x_k + \hat{\ell}_{k/k} \hat{v}_{k/k} + \hat{\ell}_{k/k} \tilde{v}_{k/k} + \tilde{\ell}_{k/k} \hat{v}_{k/k} + \tilde{\ell}_{k/k} \tilde{v}_{k/k}$$

soit

$$x_{k+1} = f x_k + \hat{\ell}_{k/k} v_k + (\ell_k - \hat{\ell}_{k/k}) \hat{v}_{k/k} + \tilde{\ell}_{k/k} \tilde{v}_{k/k}$$

où encore

$$(4.1.3) \quad x_{k+1} = f x_k + \hat{\ell}_{k/k} v_k + \hat{v}_{k/k} \ell_k - \hat{\ell}_{k/k} \hat{v}_{k/k} + \tilde{\ell}_{k/k} \tilde{v}_{k/k}$$

Linéarisation

Nous considérons tout simplement que le produit d'erreurs $\tilde{\ell}_{k/k} \tilde{v}_{k/k}$ est négligeable*

connaissant $\begin{vmatrix} \hat{x}_{k/k} \\ \hat{v}_{k/k} \\ \hat{\ell}_{k/k} \end{vmatrix}$ l'équation (4.1.3) devient alors linéaire par rapport à $\begin{vmatrix} x_k \\ v_k \\ \ell_k \end{vmatrix}$

L'équation (4.1.3) s'écrit donc :

$$4.1.4 \quad x_{k+1} = f x_k + \hat{\ell}_{k/k} v_k + \hat{v}_{k/k} \ell_k - \hat{\ell}_{k/k} \hat{v}_{k/k}$$

On augmente l'état en introduisant les équations supplémentaires suivantes :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \delta_k \\ \ell_{k+1} &= \ell_k \end{aligned} \quad (\delta_k \text{ est une séquence indépendante de variance } T_0)$$

* On peut trouver en [6] des linéarisations plus élaborées prenant en considération les contributions des termes du deuxième ordre, lors du filtrage.

En désignant par θ_k l'état ainsi augmenté :

$$\theta_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ l_k \end{bmatrix}$$

Les équations (4.1.4) et l'équation de sortie s'écrivent :

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = \begin{bmatrix} f & \hat{x}_{k/k} & \hat{v}_{k/k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \theta_k + \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k/k} & \hat{v}_{k/k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_k \\ 0 \end{bmatrix} \\ y_k = [h \ 10] \theta_k \end{cases}$$

Le système 4.1.5 est linéaire et la variance de δ_k est connue. On peut donc appliquer le filtre de KALMAN, et calculer, compte tenu de y_{k+1} , l'estimation $\hat{\theta}_{k+1/k+1}$ de θ_{k+1} .

Notons que ce filtre est non stationnaire, car les coefficients des équations (4.1.5) sont variables.

La connaissance de $\hat{\theta}_{k+1/k+1}$ permet de calculer l'estimation $\hat{\theta}_{k+2/k+2}$ (compte tenu de y_{k+2}) et ainsi de suite, jusqu'au régime permanent.

En conclusion, si la variance T_0 de v_k est connue, on peut, par l'intermédiaire d'une estimation de l'état augmenté θ , identifier le gain l .

Nous nous intéressons maintenant au problème plus général où la variance T_0 est inconnue.

4.4.2 - $T_0 = E(v_k^2)$ est inconnue. Filtre non linéaire classique

Rappelons le modèle

$$4.2.1 \quad \begin{cases} x_{k+1} = fx_k + l v_k \\ y_k = hx_k + v_k \end{cases}$$

où les valeurs de l et T_0 sont à identifier.

On peut poser

$$v_{k+1} = \sigma \varepsilon_k$$

avec

ε_k = séquence centrée de variance 1

σ = écart-type de v_k à identifier ($\sigma = \sqrt{T_0}$)

On peut penser qu'il serait possible d'identifier λ et σ par filtrage non linéaire.

On choisit donc le nouvel état augmenté :

$$\psi_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ \lambda_k \\ \sigma_k \end{bmatrix}$$

Un calcul identique à celui effectué en 4.1 nous permet d'écrire, en conservant les mêmes notations :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f x_k + \hat{\tau}_{k/k} v_k + \hat{\nu}_{k/k} \lambda_k - \hat{\tau}_{k/k} \hat{\nu}_{k/k} + \tilde{\lambda}_{k/k} \tilde{\nu}_{k/k} \\ v_{k+1} &= (\hat{\sigma}_{k/k} + \tilde{\sigma}_{k/k}) (\hat{\varepsilon}_{k/k} + \tilde{\varepsilon}_{k/k}) \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k \\ \sigma_{k+1} &= \sigma_k \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

. Linéarisation

Rappelons tout d'abord que ε_k est un bruit blanc centré, et donc que :

$$\hat{\varepsilon}_{k/k} = 0$$

soit encore :

$$\varepsilon_k = \tilde{\varepsilon}_{k/k} \quad (4.2.3)$$

Alors en reprenant (4.2.2) on a :

$$v_{k+1} = (\hat{\sigma}_{k/k} + \tilde{\sigma}_{k/k}) \tilde{\varepsilon}_{k/k}$$

On néglige le terme produit d'erreurs comme précédemment :

$$v_{k+1} = \hat{\sigma}_{k/k} \tilde{\varepsilon}_{k/k} \quad \text{soit, compte tenu de (4.2.3)}$$

$$v_{k+1} = \hat{\sigma}_{k/k} \varepsilon_k$$

Le système (4.2.2), une fois linéarisé, s'écrit donc :

$$x_{k+1} = f x_k + \hat{x}_{k/k} v_k + \hat{v}_{k/k} u_k - \hat{x}_{k/k} \hat{v}_{k/k}$$

$$v_{k+1} = \hat{\sigma}_{k/k} \varepsilon_k$$

$$u_{k+1} = u_k$$

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k$$

Soit, écrivant de plus l'équation de sortie :

$$(4.2.4) \quad \psi_{k+1} = \begin{bmatrix} f & \hat{x}_{k/k} & \hat{v}_{k/k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \psi_k + \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k/k} & \hat{v}_{k/k} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\sigma}_{k/k} \varepsilon_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \psi_k$$

On applique le filtre de Kalman à ce système linéaire. Il serait fastidieux d'en écrire les équations mais remarquons simplement la chose suivante :

La composante σ_k de l'état augmenté est :

- découplée des autres états
- indépendante de la sortie

Il est donc évident que la mesure y_{k+1} ne peut apporter aucune information supplémentaire sur σ_{k+1} et que l'équation du filtrage de Kalman étendu concernant cette composante se réduit à :

$$\hat{\sigma}_{k+1/k+1} = \hat{\sigma}_{k/k}$$

et, par conséquent, lorsque le filtre fonctionne, on aura toujours :

$$\hat{\sigma}_{k/k} = \hat{\sigma}_0$$

En conclusion, il apparaît donc qu'une méthode de filtrage non linéaire élémentaire est absolument stérile pour l'identification de la variance de l'innovation.

4.3 - $T_0 = E(v_k^2)$ est inconnue : filtre non linéaire avec estimateur de variances

L'adoption de l'état augmenté ψ (dimension 4) n'a pas permis l'identification de ℓ et T_0 . Nous reprenons donc :

$$\theta_k = \begin{bmatrix} x_k \\ v_k \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

et nous rappelons l'évolution du système linéarisé :

$$\theta_{k+1} = \begin{bmatrix} f & \hat{x}_{k/k} & \hat{v}_{k/k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \theta_k + \begin{bmatrix} -\hat{x}_{k/k} & \hat{v}_{k/k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_k \\ 0 \end{bmatrix}$$

(4.3.1)

$$y_k = \begin{bmatrix} h & 1 & 0 \end{bmatrix} \theta_k$$

Si nous étions dans le cas optimal (filtre non linéaire optimal et connaissance de T_0 exact) nous disposerions de l'estimation $\theta_{k+1/k+1}$, et de l'erreur d'estimation $\bar{\theta}_{k+1/k+1} = \theta_{k+1} - \theta_{k+1/k+1}$

(on rappelle que pour un filtre non linéaire sous optimal, on a :

$$\tilde{\theta}_{k+1/k+1} = \theta_{k+1} - \hat{\theta}_{k+1/k+1})$$

En particulier, on aurait :

$$(4.3.2) \quad v_{k+1} = v_{k+1/k+1} + \bar{v}_{k+1/k+1}$$

Si le filtre ainsi considéré est optimal, il vérifie donc le principe d'orthogonalité : $E(v_{k+1/k+1} \cdot \bar{v}_{k+1/k+1}) = 0$. Alors, en élevant au carré les deux membres de l'équation (4.3.2) et en prenant l'espérance :

$$4.3.3 \quad E(v_{k+1}^2) = E(v_{k+1/k+1}^2) + E(\bar{v}_{k+1/k+1}^2)$$

On peut ajouter et retrancher $v_{k+1/k+1}^2$ au membre de droite de 4.3.3

$$E(v_{k+1}^2) = E(v_{k+1/k+1}^2) + E(\bar{v}_{k+1/k+1}^2) + (v_{k+1/k+1}^2 - v_{k+1/k+1}^2)$$

soit, en regroupant les termes différemment :

$$4.3.4 \quad E(v_{k+1}^2) = v_{k+1/k+1}^2 + E(\bar{v}_{k+1/k+1}^2) + [E(v_{k+1/k+1}^2) - v_{k+1/k+1}^2]$$

Remarquons que le terme $[E(v_{k+1/k+1}^2) - v_{k+1/k+1}^2]$ est d'espérance nulle.

En désignant par ρ_k une séquence centrée, on peut donc poser :

$$\rho_{k+1} = E(v_{k+1/k+1}^2) - v_{k+1/k+1}^2$$

Alors, l'équation 4.3.4 s'écrit :

$$E(v_{k+1}^2) = v_{k+1/k+1}^2 + E(v_{k+1/k+1}^2) + \rho_{k+1}$$

soit :

$$4.3.5 \quad T_o = v_{k+1/k+1}^2 + E(v_{k+1/k+1}^2) + \rho_{k+1}$$

En fait, même si l'on dispose de T_o exact, le filtre non linéaire employé n'est pas optimal, mais simplement sous optimal.

Nous considérons toutefois que l'équation (4.3.5) est encore valable, et nous écrivons donc :

$$4.3.6 \quad T_o = \hat{v}_{k+1/k+1}^2 + E(\hat{v}_{k+1/k+1}^2) + \rho_{k+1}$$

T_o se présente donc sous la forme d'une somme de deux variables aléatoires $[(\hat{v}_{k+1/k+1}^2 + E(\hat{v}_{k+1/k+1}^2)) \text{ et } (\rho_{k+1})]$ dont l'une (ρ_k) est d'espérance nulle. T_o est donc égal à la valeur moyenne de l'autre :

$$4.3.7 \quad T_o = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\hat{v}_{k+1/k+1}^2 + E(\hat{v}_{k+1/k+1}^2)]$$

On peut considérer une suite $\{T_{oN}\}$ convergeant vers T_o , définie par

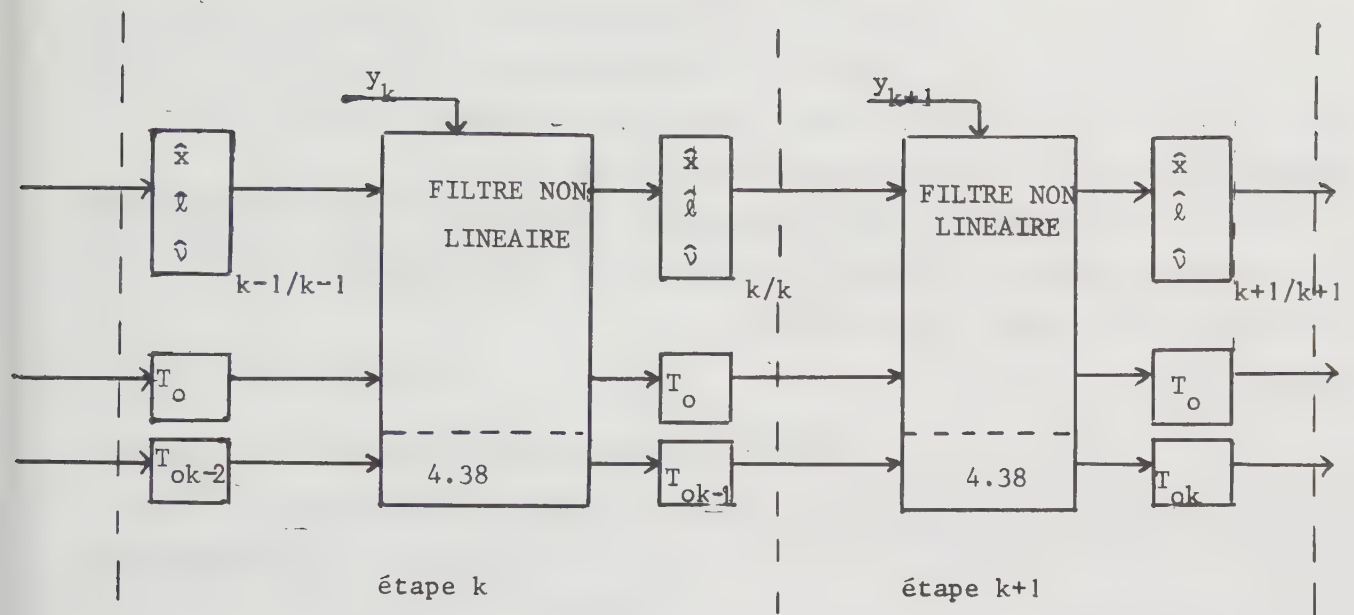
$$T_{oN} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [\hat{v}_{k+1/k+1}^2 + E(\hat{v}_{k+1/k+1}^2)]$$

Un calcul immédiat donne la définition récurrente de T_{oN}

$$4.3.8 \quad T_{o_{k+1}} = T_{o_k} + \frac{1}{k} [\hat{v}_{k+1/k+1}^2 + E(\hat{v}_{k+1/k+1}^2) - T_{o_k}]$$

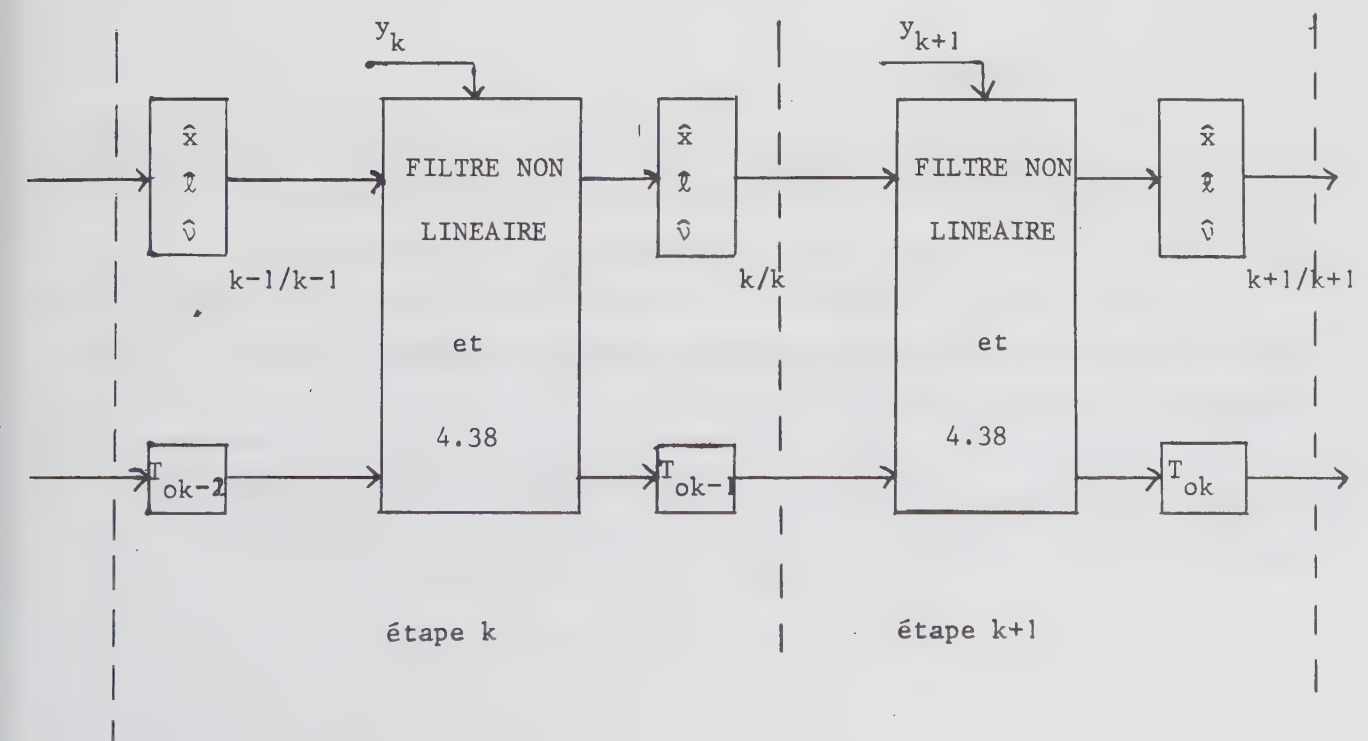
On remarque que le filtre non linéaire construit à partir de T_o exact, fournit à l'étape $k+1$, $\hat{v}_{k+1/k+1}^2$ et $E(\hat{v}_{k+1/k+1}^2)$. Il permet ainsi, connaissant T_{o_k} , de calculer $T_{o_{k+1}}$

Si nous schématisons alors l'évolution simultannée de ce filtre non linéaire et de la suite $\{T_{o_k}\}$, nous obtenons :



La suite $\{T_{ok}\}$ ainsi construite, converge vers T_0

. Si la valeur de T_0 n'est pas connue, on peut considérer un schéma déduit du précédent, où le filtre non linéaire est construit non plus à partir de T_0 , mais à partir de T_{ok} :



Il n'est alors pas sûr que ce système converge (et en particulier, la suite $\{T_{ok}\}$).

On peut simplement dire que T_o est une valeur possible de convergence de $\{T_{ok}\}$, si cette suite converge. Dans cette éventualité, le problème de l'identification de T_o et ℓ et donc résolu, mais aucune démonstration théorique de la convergence de $\{T_{ok}\}$ vers T_o ne peut être fournie.

Notons toutefois que nous avons testé cette méthode sur divers exemples, avec diverses initialisations, et que nous avons constaté qu'elle convergeait dans tous les cas étudiés.

Remarque

Il peut paraître surprenant que cette méthode présente une possibilité d'identifier ℓ et T_o , alors que la méthode 4.2 ne donnait aucun résultat pour ℓ et σ . En fait, ceci est normal, car nous pouvons dire intuitivement que, si la mesure y_{k+1} n'apporte rien pour la connaissance de ε_{k+1} , elle donne une information sur v_{k+1} .

4.4.4 - Généralisation au cas multivariable

L'extension multivariable de la méthode précédente est triviale. En particulier, le filtre estimateur de variances s'écrit :

$$(4.3.9) \quad T_{ok+1} = T_{ok} + \frac{1}{k} \left[\hat{v}_{k+1/k+1}^T \hat{v}_{k+1/k+1} + E (\tilde{v}_{k+1/k+1}^T \tilde{v}_{k+1/k+1}) - T_{ok} \right]$$

4.4.5 - Conclusion

La méthode de filtrage non linéaire sous optimal que nous venons de présenter s'applique dans les mêmes conditions que les précédentes (ch.1 et 2) elle a toutefois l'avantage de pouvoir être employée en temps réel.

D'une manière générale, la convergence des filtres non linéaires sous optimaux n'est pas théoriquement assurée, mais, en pratique, la probabilité de divergence est d'autant plus faible que l'estimation initiale est meilleure.

Dans tous les cas que nous avons traités par cette méthode, nous avons constaté la convergence, et ceci malgré des initialisations suffisamment "larges" pour que le résultat final soit indépendant des conditions initiales.

Chapitre 5

PARTIE EXPERIMENTALE

La partie expérimentale de notre étude a été effectuée en simulation pour tester le bon fonctionnement des programmes mis au point pour chaque méthode, puis sur exemple réel. Le calculateur utilisé est un IBM 370-135.

5.1 - ETUDE EN SIMULATION

5.1.1 - Construction d'un échantillon

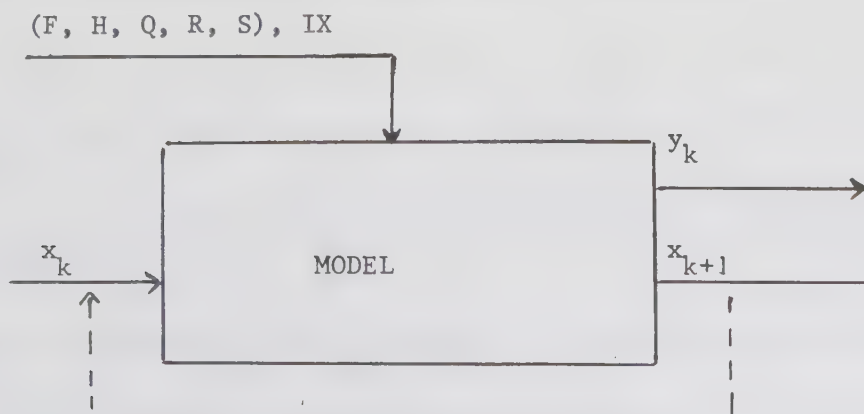
La donnée principale du problème est un échantillon $\{y_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) du processus $\{y_k\}$, vérifiant le système.

$$1.1. \quad \begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + v_k \\ y_k = Hx_k + w_k \end{cases}$$

où $\begin{vmatrix} v_k \\ w_k \end{vmatrix}$ est une séquence blanche centrée de variance covariance $\begin{vmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{vmatrix}$

* La séquence $\begin{vmatrix} v_k \\ w_k \end{vmatrix}$ est calculée par un sous programme dont les arguments d'entrées sont (Q, R, S) ainsi qu'un indicateur (IX) permettant le choix d'une séquence particulière. L'argument de sortie est la séquence $\begin{vmatrix} v_k \\ w_k \end{vmatrix}$

* Le calcul de y_k se fait ensuite en simulant les équations (1.1). Tous ces calculs sont regroupés sous forme d'un sous programme (sous programme MODEL) dont on peut schématiser le fonctionnement de la façon suivante :



5.1.2.- Fonction de corrélation

Les deux premières méthodes étudiées font appel à un calcul de fonction de corrélation. Les modalités de calcul ont été décrites en (2.4.3) ; la fonction de corrélation est issue d'un sous programme GENCO, dont le fonctionnement est le suivant.

On réserve

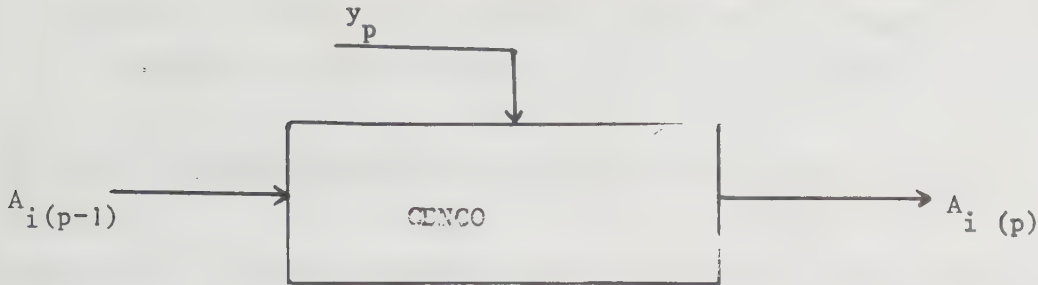
-Y : zone de stockage intermédiaire dans lesquelles s'inscrivent les valeurs consécutives de y_k , avec un décalage à chaque itération. En régime permanent, cette zone contient (i max +1) valeurs consécutives de y_k

- A_i : zone de stockage des valeurs itératives de A_i (P), initialisées à zéro.

Fonctionnement du sous programme GENCO

P	1	2		N
Y	0 0 0 0 y_1	0 0 $y_1 y_2$		$y_{N-i_{max}-1} \dots y_N$
A_0	$A_0 + \frac{1}{1} (y_1 y_1^T - A_0)$	$A_0 + \frac{1}{2} (y_2 y_2^T - A_0)$		$A_0 + \frac{1}{N} (y_N y_N^T - A_0)$
A_1	0	$A_1 + \frac{1}{2} (y_2 y_1^T - A_1)$		$A_1 + \frac{1}{N} (y_N y_{N-1}^T - A_1)$
A_2	0	0		
⋮				
$A_{i_{max}-1}$	0	0		
$A_{i_{max}}$	0	0		

On peut schématiser le fonctionnement de GENCO de la façon suivante :



5.1.3 - Principe de l'étude en simulation

L'étude des méthodes en simulation consiste à effectuer les opérations suivantes :

1.3.1 On se donne (F, H, Q, R, S). De là, on calcule L et T_0 par des formules classiques du filtrage de KALMAN.

1.3.2 On construit des échantillons $\{y_k\}$ du processus (on pourra faire varier la longueur des échantillons, ainsi que les séquences aléatoires choisies).

1.3.3 On applique les trois méthodes précédentes, et on compare les valeurs de L et T_0 ainsi trouvées avec celles précalculées en (1.3.1)

1.3.4 On pourra visualiser les résultats trouvés en trouvant sur un même graphe les fonctions de corrélation :

- de l'échantillon construit en 1.3.2
- d'un échantillon construit à partir des résultats de 1.3.3

5.1.4 - Méthode de FAURRE

- Dans le cas où on ne dispose que d'un échantillon $\{y_k\}$, on commence par appliquer l'algorithme de HO à la suite $\{A_1 A_2 \dots A_{i_{\max}}\}$; ce qui fournit le triplet (H, F, G) (cf. 1.4.1)

- Si on dispose aussi des matrices (H et F), on calculera G par résolution du système

$$\begin{cases} A_1 = HG \\ \vdots \\ A_{i_{\max}} = HF^{i_{\max} - 1} G \end{cases}$$

Cette résolution s'effectuant par une méthode de moindres carrés

(cf. 1.4.2).

Nous avons testé la méthode de FAURRE dans les deux cas considérés, sur de nombreux exemples numériques, et en particulier les suivants :

5.1.4.1 - Essai de la méthode de FAURRE avec identification de H et F

Les données permettant de construire l'échantillon sont les suivantes :

$$F = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0.602 & 0 \\ 0 & 0.149 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.152 \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La longueur de l'échantillon est de 2000 points.

L'algorithme de HO a fourni les résultats suivants :

- rang de la matrice de HANKEL : 2

	A ₀	H	F	G
Valeur calculée	2.582	1.041 1.002	0.806 0.005 0.002 0.898	1.329 0.705
Valeur exacte	2.618	1.00 1.00	0.800 0 0 0.900	1.340 0.710

L'algorithme de FAURRE a ensuite fourni les résultats suivants :

	L	T ₀
Valeur calculée	0.498 0.262	0.996
Valeur exacte	0.510 0.270	1.000

5.1.4.2 - Essai en supposant connu (H et F)

Nous supposons connus H et F, et l'échantillon est construit à partir d'une forme filtre.

Les données permettant de construire les échantillons, sont les suivantes :

$$F = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.20 \\ 0.10 & 0.15 \\ 0.25 & 0.05 \end{bmatrix} \quad T_o = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

La longueur de l'échantillon est de 5000 points

* Calcul de G par moindres carrés : (H et F supposés connus)

valeur exacte de G		valeur calculée de G	
0.757	0.607	0.751	0.612
0.581	0.457	0.593	0.452
0.430	0.242	0.428	0.245

* Calcul de L et T_o par l'algorithme de FAURRE (à partir de G calculé)

	valeur exacte		valeur calculée	
L	0.150	0.200	0.160	0.204
	0.100	0.150	0.101	0.143
	0.250	0.050	0.261	0.048
T_o	1	0.1	0.975	0.085
	0.1	1	0.085	0.978

Il est à remarquer que lors des exemples étudiés précédemment, la suite $\{A_0', A_1'', A_2'', \dots, A_{i \max}''\}$ présente un caractère positif réel, ce qui assure l'existence d'une solution et donc la convergence de l'algorithme.

5.1.4.3 - Limite de la méthode

Si la suite $\{A_0', A_1'', \dots, A_{i \max}''\}$ n'est plus de type positif réel, la méthode ne fournit aucune solution, car au cours des calculs, la matrice $(A_0 - H \Pi_n H^T)$, qu'il faut inverser, peut devenir non définie positive. On peut essayer de donner à la suite $\{A_0', A_1''\}$ le type positif réel en modifiant $(A_0$ ou $G)$, mais il est alors préférable d'employer l'une des deux autres méthodes exposées.

En particulier, la méthode de FAURRE ne donne pas de résultat pour le système proposé par MEHRA [EEE] qui est caractérisé par :

$$F = \begin{bmatrix} 0.75 & 1.74 & 0.3 & 0 & 0.15 \\ 0.09 & 0.91 & 0.0015 & 0 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.905 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 607.13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.097 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.349 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'insuccès de cette méthode semble dû aux erreurs d'arrondis accumulées lors de la construction de l'échantillon et du calcul de la fonction de corrélation

5.1.5 - Méthode de MEHRA

5.1.5.1 - Exemples traités

Cette méthode a été appliquée à divers exemples numériques, et en particulier à celui proposé par MEHRA (cf. 1.4.3)

L'application des formules classiques du filtrage de KALMAN nous a permis de calculer par ailleurs $(L$ et $T_0)$, et nous sommes donc en mesure de vérifier nos résultats.

Les échantillons simulés sont d'une longueur de 5000 points, et nous présentons dans le tableau suivant les résultats obtenus pour un échantillon.

	Valeur exacte		Valeur calculée	
L	1.563	0.551	1.54	0.580
	0.092	0.385	0.091	0.388
	-2.718	-1.14	-2.82	-1.11
	-0.001	0.136	-0.003	0.121
	0.028	-0.694	0.050	-0.650
T_o	65.07	0.417	64.41	0.552
	0.417	2.444	0.552	2.421

Si on applique l'algorithme à d'autres échantillons de 5000 points, nous constatons que les valeurs calculées encadrent les valeurs exactes, ce qui semble indiquer que l'estimateur ainsi considéré est sans biais. Toutefois, il est seulement montré que l'estimateur est asymptotiquement sans biais.

5.1.5.2 - Limites de la méthode

Nous avons procédé aux essais suivants :

- Emploi de la méthode sur un échantillon relativement court (500 points)
- Emploi de la méthode avec des matrices H et F inexactes.

Dans les deux cas, nous avons constaté que l'algorithme converge vers des valeurs qui ne sont pas des approximations des valeurs cherchées (Il est montré par ailleurs que, si H et F ne sont pas exactement connues, la "blancheur" de l'innovation n'est plus un critère d'optimalité du filtre) [Kailath IEEE March 72].

D'autre part, il est nécessaire de calculer la fonction de corrélation de l'innovation à chaque itération sur le gain, ce qui se traduit par un volume de calcul important.

5.1.6 - Filtrage non linéaire

5.1.6.1 - Exemples traités

L'emploi et la programmation de cette méthode ont fait l'objet de plusieurs publications [thèse, DEA Piasco, Rapport de recherche] et nous nous limitons à exposer les exemples traités :

L'exemple simulé est celui proposé par Mehra (cf. 1.4.3).
H et F étant donnés, nous avons fait plusieurs essais en faisant varier les valeurs initiales. Pour les deux premiers essais, L est initialisé à sa valeur exacte, alors que pour le troisième, L et T_o sont initialisés à des valeurs quelconques.

Les résultats de ces essais sont présentés dans les tableaux suivants :

- L est initialisé à sa valeur exacte :

T_o initial		T_o final		T_o exact	
180	0.8	65.55	0.502	65.07	0.417
0.8	5	0.502	2.56	0.417	2.444

T_o initial		T_o final		T_o exact	
20	0.15	63.40	0.354	65.07	0.417
0.15	1	0.354	2.505	0.417	2.444

- L et T_o sont initialisés à des valeurs quelconques :

L initial		L final		L exact	
1	0.4	1.527	0.598	0.1563	0.551
0.05	0.2	0.0947	0.312	0.092	0.385
-1	-1	-2.67	-1.007	-2.718	-1.14
-0.5×10^{-4}	0.1	0.45×10^{-4}	0.192	-0.001	0.138
0.01	-0.4	0.0115	-0.74	0.028	-0.694
T_o initial		T_o final		T_o exact	
20	0.15	60.29	0.6	65.07	0.417
0.15	1	0.6	2.432	0.417	2.444

5.1.6.2 - Limites de la méthode

Les résultats précédents prouvent l'efficacité de cette méthode en temps réel, et sa relative insensibilité aux conditions initiales, à condition toutefois que celles-ci ne soient pas trop éloignées de valeurs exactes.

La convergence a lieu en 1500-2000 itérations, ce qui correspond à un échantillon de 2000 points.

Sous l'hypothèse de valeurs initiales "acceptables", les résultats obtenus par cette méthode sont comparables à ceux obtenus par la méthode de Mehra.

5.1.7 - Conclusion de l'étude en simulation

Parmi les trois méthodes étudiées, la méthode de Faurre est évidemment la plus intéressante, puisqu'elle ne nécessite que la connaissance d'un échantillon du processus.

Toutefois, même si (F et H) sont connus, cette méthode peut très bien ne fournir aucun résultat, alors que la méthode de Mehra permet de calculer une approximation de valeurs cherchées.

La méthode de F.N.L. fournit elle aussi une approximation et, de plus, présente l'intérêt de pouvoir être appliquée en temps réel.

5.2 - ETUDE SUR EXEMPLE REEL

Le processus étudié est le roulis-tangage d'un navire. Des enregistrements de ces deux signaux nous ont été fournis par la C.A.P.C.A. (centre de calcul de la Marine Nationale - TOULON). Ils ont été effectués par beau temps, mer assez forte, face à la lame. Chaque enregistrement a une durée de 1mn environ, et les signaux sont échantillonnés avec une période de 0.05 secondes.

5.2.1 - Opérations préliminaires

* Les enregistrements nous ont été fournis sous la forme d'un lot de cartes perforées dans le format A4 (alphanumérique), c'est-à-dire que les perforations correspondent à l'image mémoire des réels flottants. Un problème est alors apparu, car la conversion (réel flottant) - (image mémoire) employée lors de la perforation des cartes (sur ordinateur CII) est différente de celle employée sur IBM 370 dont nous disposons. Il a donc fallu effectuer un codage-décodage des données pour pouvoir les utiliser.

La première opération faite est le tracé des signaux de roulis-tangage. Nous nous intéressons à la première minute d'enregistrement.

La lecture de ces enregistrements montre des signaux qui sont peu (ou pas) bruités ; on peut donc dès lors présumer que la méthode de FAURRE risque de ne donner aucun résultat, car les signaux sans bruit sont, pour cette méthode, le cas le plus défavorable.

En effet, considérons deux processus $\{y_k\}$ et $\{z_k\}$ issus des modèles suivants :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + v_k \\ y_k = Hx_k \end{cases} \quad \begin{cases} x_{k+1} = Fx_k + v_k \\ z_k = Hx_k + w_k \end{cases} \quad \text{et } \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \text{ indépendants}$$

Alors, si on note :

$$A_i = E(y_k y_{k-i}^T) \quad B_i = E(z_k z_{k-i}^T)$$

On a bien évidemment, en notant P la variance-covariance de x :

$$\begin{cases} A_0 = HPH^T \\ A_i = HF^{i-1}(FPH^T) \end{cases} \quad \begin{cases} B_0 = HPH^T + R \\ B_i = HF^{i-1}(FPH^T) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} A_0 < B_0 \\ A_i = B_i \end{cases}$$

Donc

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1^T & & \\ & A_1 & A_2^T & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & A_{i-1} & A_i^T \end{bmatrix} < B = \begin{bmatrix} B_0 & B_1^T & & \\ & B_1 & B_2^T & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & B_{i-1} & B_i^T \end{bmatrix}$$

Le caractère réel positif de la suite $\{A_i\}$ est donc plus "faible" que celui de la suite $\{B_i\}$, et donc plus sensible aux erreurs d'approximation (dues en particulier à l'algorithme de HO).

* Nous avons ensuite calculé (et tracé) la fonction de corrélation du signal, selon le mode opératoire décrit en (2.4.3, partie théorique).

On obtient ainsi la fonction de corrélation expérimentale $(A'_0, A'_1 \dots A'_i \dots A'_{i \max})$, où $i \max$ correspond à un décalage de 15 secondes. Disposant d'un échantillon de 60 secondes, il serait illusoire de calculer cette fonction de corrélation pour un décalage supérieur (cf. Ph. DE LARMINAT : "cours d'automatique. Processus, filtrage linéaire").

Il apparaît sur le tracé de cette fonction de corrélation que l'échantillonnage (de 0.05 secondes) est surabondant et ne fournit aucune information de plus qu'un échantillonnage plus large, tout en augmentant le volume de calcul.

Nous avons donc choisi un pas d'échantillonnage 8 fois plus grand, soit 0, 4 secondes.

Nous obtenons alors la fonction de corrélation expérimentale suivante :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{A}'_0 = A'_0 \\ \bar{A}'_1 = A'_8 \\ \bar{A}'_2 = A'_{16} \\ \vdots \end{array} \right.$$

*L'Algorithme de HO est appliqué à la suite $\{\bar{A}'_i\}$ (qui présente le caractère positif réel par construction), le décalage maximum est conservé égal à 15 secondes. Nous obtenons plusieurs triplets (H, F, G) de taille croissante, correspondant à diverses précisions (affichées à l'entrée du programme), permettant de calculer plusieurs suites $\{A''_1 \dots A''_{i \max}\}$.

On peut présenter les résultats fournis par l'algorithme de HO dans le tableau suivant :

taille du modèle	erreur relative	caractère positif réel de $A'_0 A''_1 \dots A''_{i \max}$
4	0.03	non
8	0.005	non
10	0.001	non

La suite $\{A'_0, A''_1 \dots A''_{i \max}\}$ n'étant de type positif réel pour aucun modèle, nous avons choisi le modèle d'ordre 4 comme compromis simplicité précision.

5.2.3 - Méthode de FAURRE

La méthode de FAURRE n'est pas applicable directement aux données fournies par l'algorithme de HO. Les données sont les suivantes :

$$F = \begin{vmatrix} 0.8540 & 0.3305 & 0.0116 & 0.0143 \\ 0.2962 & 0.9704 & 0.0954 & 0.0455 \\ 0.0057 & 0.0020 & 0.8200 & 0.3544 \\ 0.0092 & 0.0183 & 0.3642 & 0.9603 \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} -3.7722 & -1.3450 \\ 0 & -1.2422 \\ 0 & 1.8568 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} -0.4385 & -0.0293 & -0.1253 & -0.0392 \\ -0.0394 & -0.1136 & 0.4599 & -0.0443 \end{vmatrix}$$

avec

$$\bar{A}'_0 = \begin{vmatrix} 1.7525 & 0.2758 \\ 0.2758 & 1.1136 \end{vmatrix}$$

* Nous avons alors augmenté arbitrairement les termes diagonaux de la matrice $\bar{A}'_0$ pour donner à la suite $\{\bar{A}'_0, A''_1, \dots\}$ le type réel positif.

$$\text{Nous avons choisi } A''_0 = \begin{bmatrix} 1.77 & 0.2758 \\ 0.2758 & 1.115 \end{bmatrix}$$

Cette modification introduit un écart relatif maximum de 0, 015 sur les termes concernés, et est donc compatible avec l'erreur relative (0.03) due à l'algorithme de HO.

Alors, la suite $\{A''_0, A''_1, \dots, A''_{i \max}\}$ est de type positif réel, et on peut appliquer l'algorithme de FAURRE.

Les valeurs fournies par l'algorithme de FAURRE sont les suivantes :

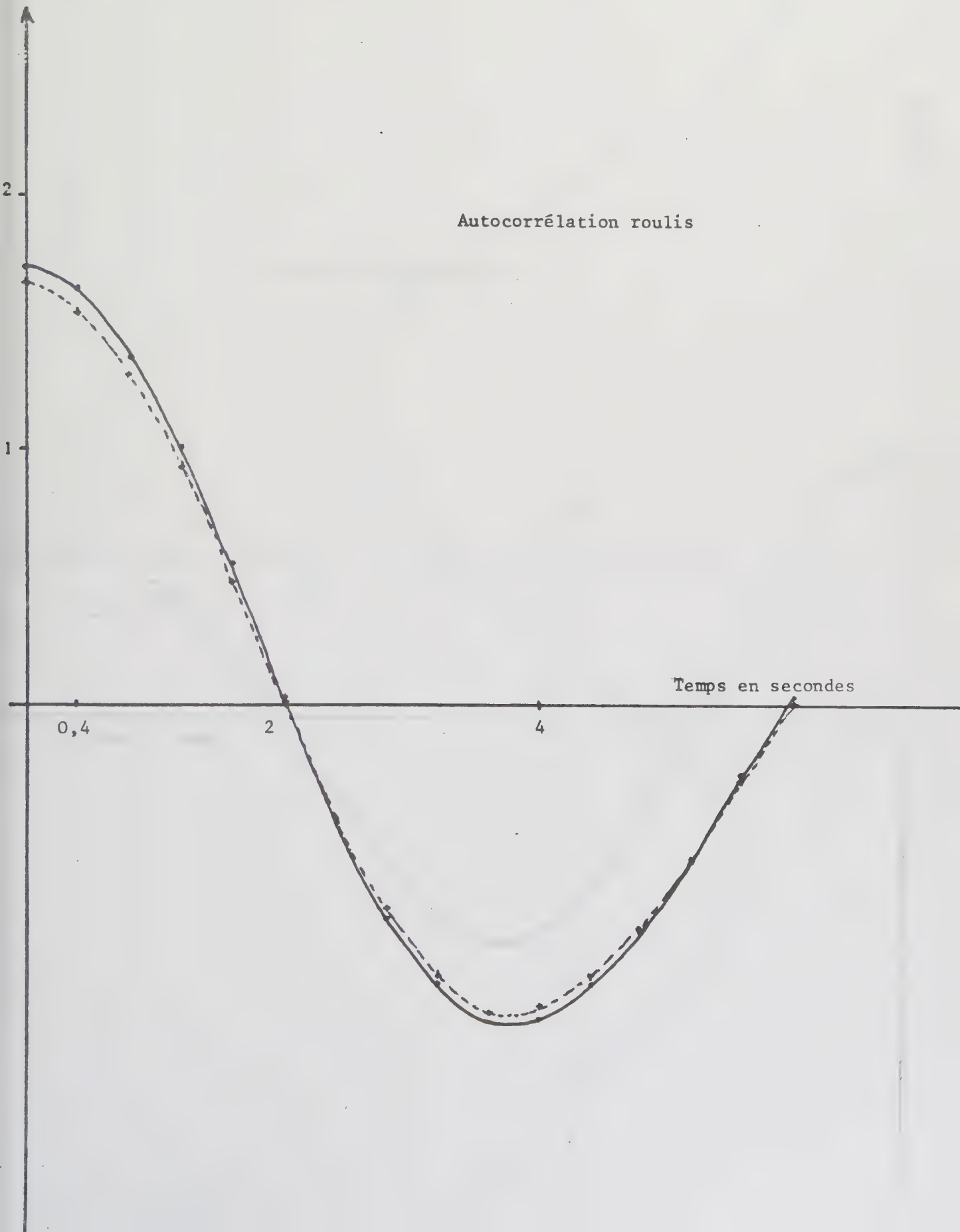
$$L = \begin{vmatrix} -2.4306 & + 0.6312 \\ -3.4825 & - 2.1978 \\ -0.8014 & + 2.0737 \\ -1.1816 & - 1.8639 \end{vmatrix}$$

$$T_0 = \begin{vmatrix} 0.0600 & - 0.0173 \\ -0.0173 & 0.0651 \end{vmatrix}$$

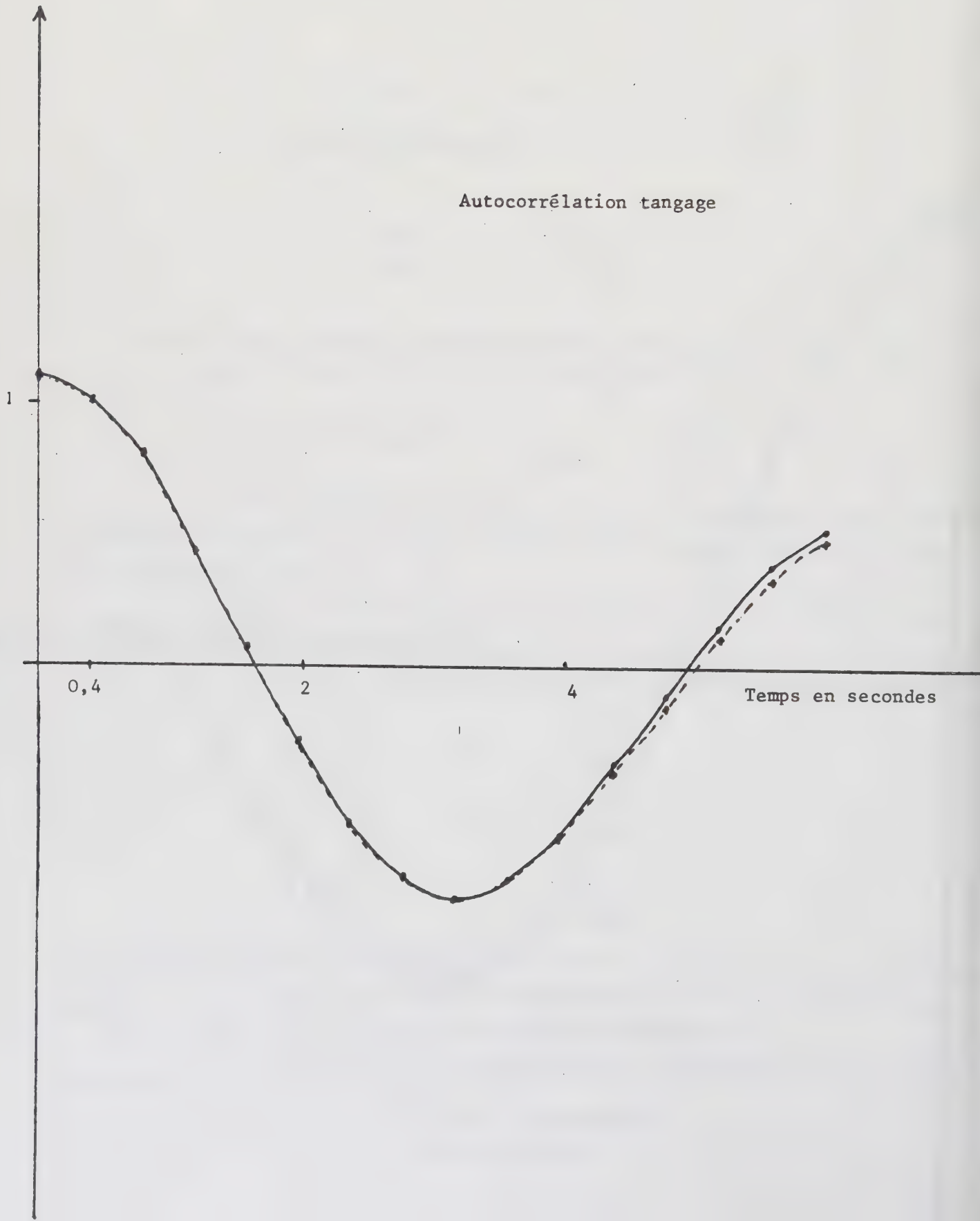
* Un moyen de contrôle de l'identification est de simuler la forme filtre ainsi obtenue (F, H, L, T_0) et de comparer la fonction de corrélation de la sortie de cette simulation avec la fonction de corrélation expérimentale.

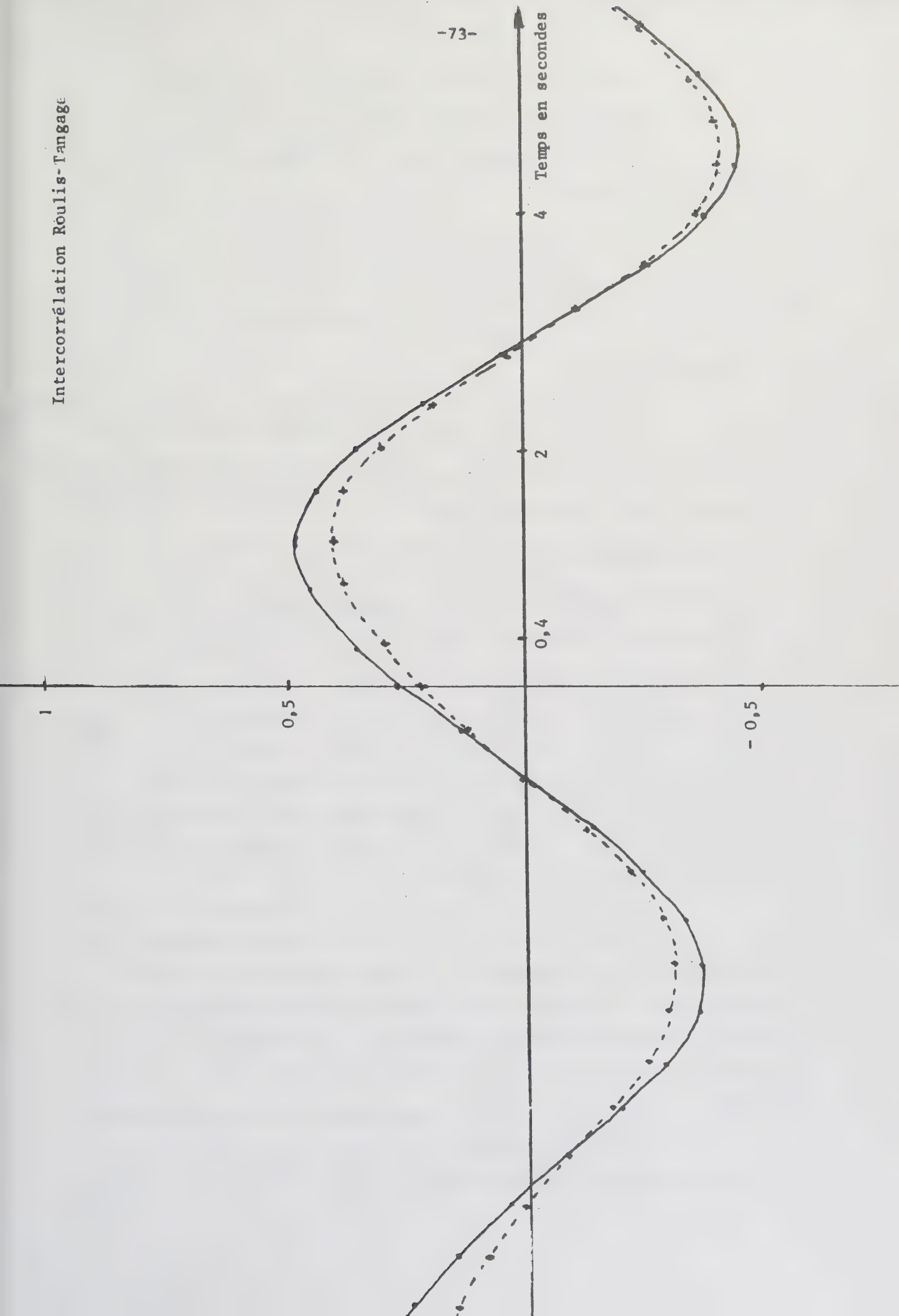
Les résultats de cette comparaison sont représentés sur les figures suivantes :

- En trait plein la fonction expérimentale
- En pointillé la fonction simulée.



Autocorrélation tangage





La proximité des courbes expérimentales et simulées nous permet de conclure à la validité du modèle obtenu par la méthode de FAURRE. Le temps de calcul est le suivant :

Algorithme de HO :	3 mn 15
Algorithme de FAURRE :	2 mn 30
Total :	5 mn 45

5. 2.4 - METHODE DE MEHRA

Nous avons appliqué la méthode de MEHRA à l'échantillon précédemment traité. Les matrices F et H, sont celles utilisées pour la méthode de FAURRE.

Nous présentons sur les figures suivantes les évolutions du gain de la forme filtre, et des coefficients de la covariance de l'innovation.

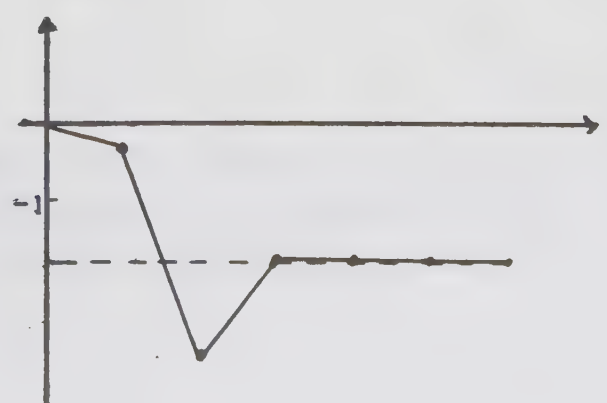
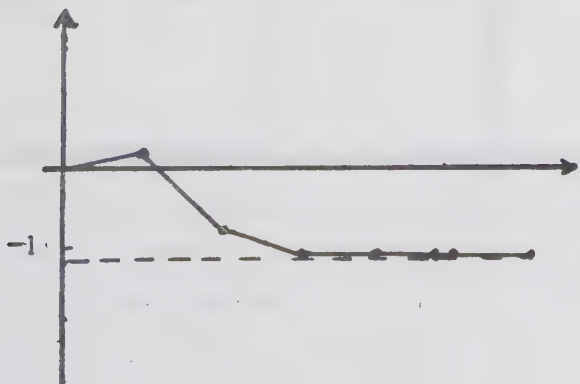
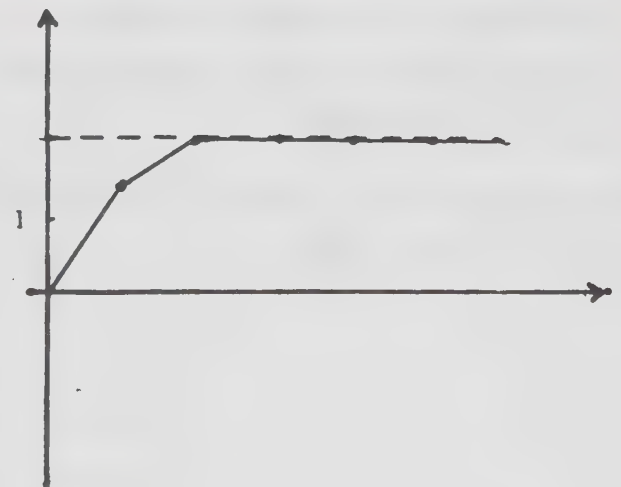
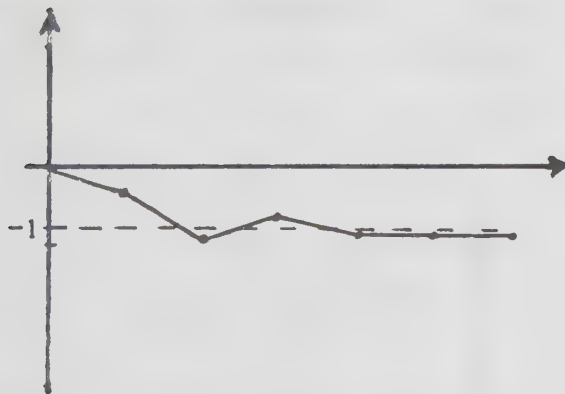
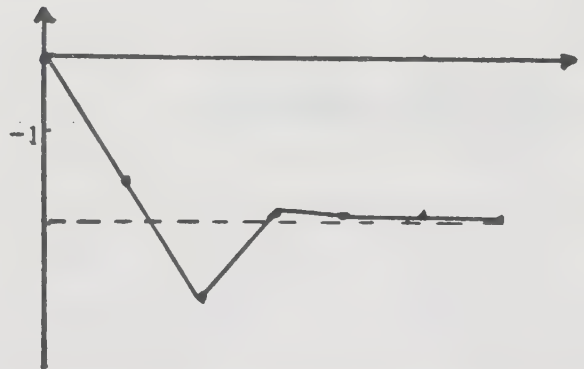
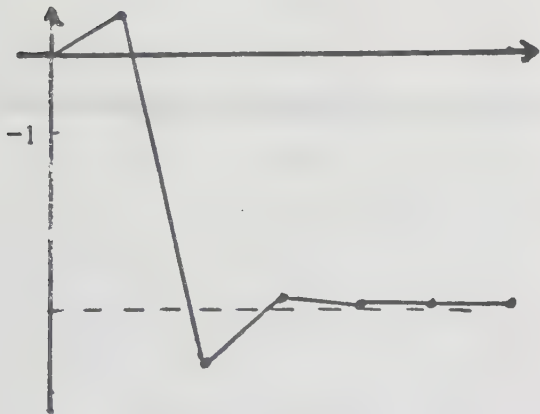
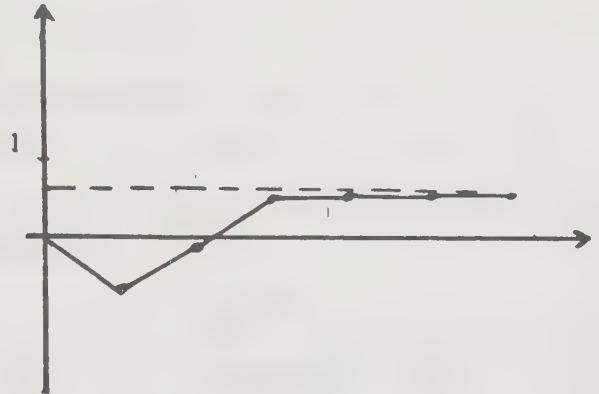
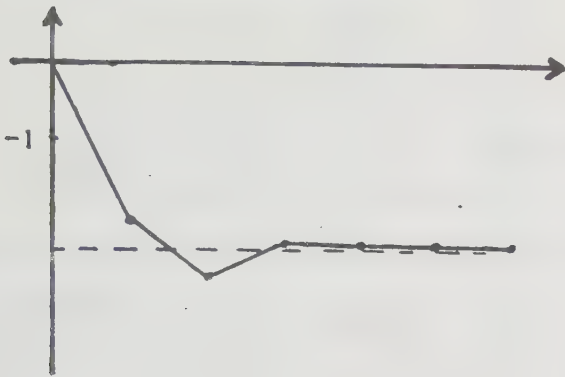
Les valeurs à la convergence sont les suivantes :

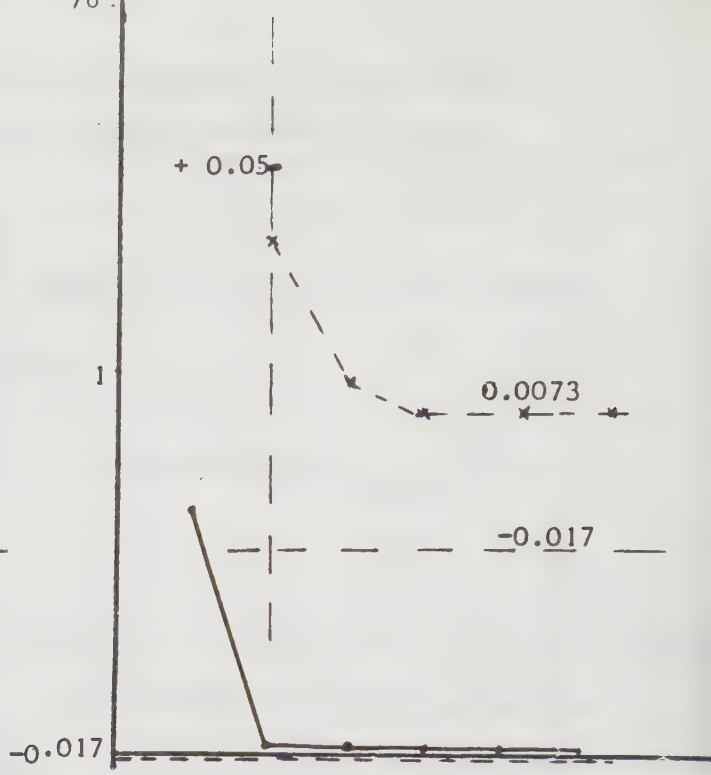
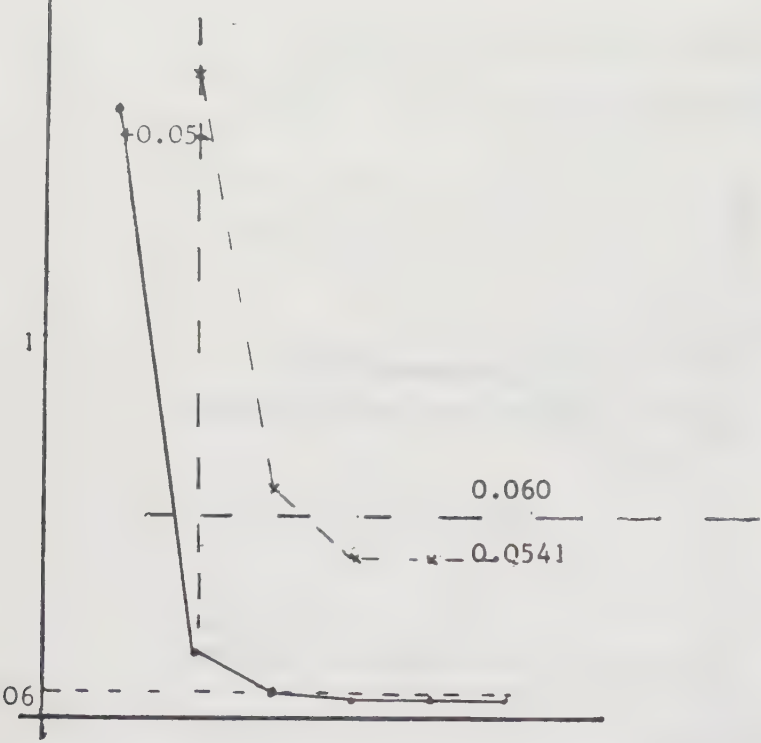
	MEHRA	FAURRE (RAPPEL)
$L =$	$\begin{vmatrix} -2.397 & 0.561 \\ -3.318 & -2.183 \\ -0.772 & 2.016 \\ -1.113 & -1.710 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2.4306 & +0.6312 \\ -3.4825 & -2.1978 \\ -0.8014 & +2.0737 \\ -1.1816 & -1.8639 \end{vmatrix}$
$T_o =$	$\begin{vmatrix} 0.054 & 0.007 \\ 0.007 & 0.053 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0.060 & -0.0173 \\ -0.0173 & 0.0651 \end{vmatrix}$

Ces résultats sont donc tout à fait comparables à ceux obtenus par la méthode de FAURRE, et on voit donc que la méthode de MEHRA fournit elle aussi un résultat acceptable. La fonction de corrélation issue d'une simulation sur les résultats de la méthode de MEHRA est pratiquement confondue avec celle obtenue avec les résultats de l'algorithme de FAURRE, et elle est donc très proche de la fonction expérimentale. Le temps de calcul est le suivant :

Algorithme de HO :	3 mn 15
Algorithme de MEHRA :	15 mn 45
Total	19 mn 00

Evolution des coefficients du gain par la méthode de Mehra
En pointillés les valeurs obtenues par l'algorithme de FAURRE

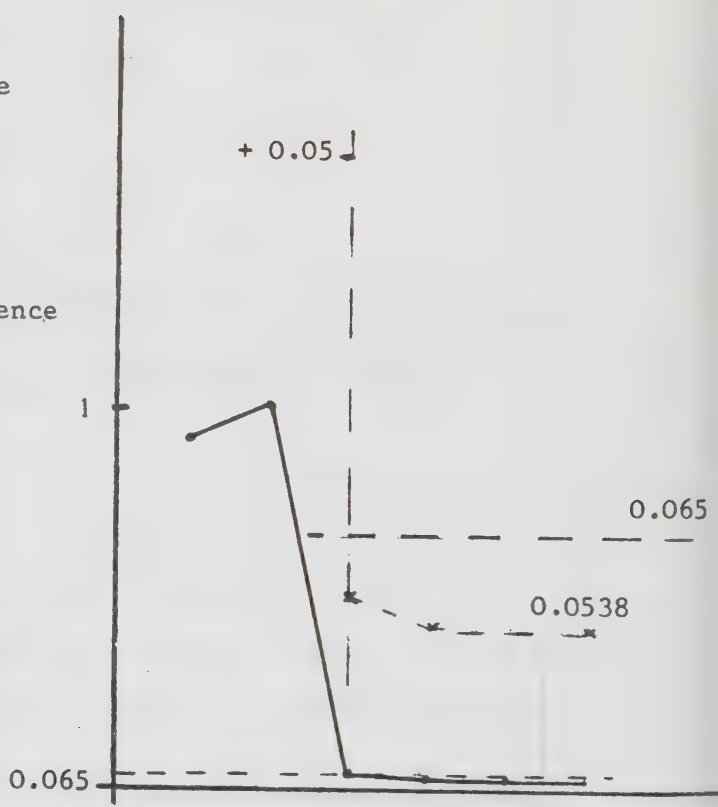




Evolution de la matrice de covariance de l'innovation par la méthode de Mehra.

En pointillés, les valeurs obtenues par l'algorithme de FAURRE.

Axes en pointillés, étude de la convergence locale (échelle $\times 20$).



5.2.5 - FILTRAGE NON LINEAIRE

Nous avons appliqué le filtre non linéaire à l'échantillon déjà étudié.

Nous rappelons qu'il s'agit d'une méthode "temps réel", et nous sommes limités (comme pour les autres algorithmes) à la longueur de l'échantillon.

A la fin de l'enregistrement (dont la durée est de l'ordre de 1 mn) nous avons obtenu les résultats suivants :

Filtre non linéaire			MEHRA (rappel)			FAURRE (rappel)		
L	-2.4356	0.5103	-2.397	0.561		-2.4306	0.6312	
	-3.3556	-2.4318	-3.318	-2.183		-3.4825	-2.1978	
	-0.7366	1.9417	-0.772	2.016		-0.8014	2.0737	
	-1.1758	-1.5203	-1.113	-1.710		-1.1816	-1.8639	
T ₀	0.0567	-0.013	0.054	0.007		0.060	-0.017	
	-0.013	0.0607	0.007	0.053		-0.017	0.0651	

Le filtrage non linéaire fournit donc des résultats comparables aux autres méthodes. Toutefois, la longueur de l'échantillon ne nous permet pas d'initialiser les divers paramètres "trop loin" des valeurs présumées exactes.

Ici, le gain a été initialisé à

0	0
0	0
0	0
0	0

la matrice de variance covariance de l'innovation à

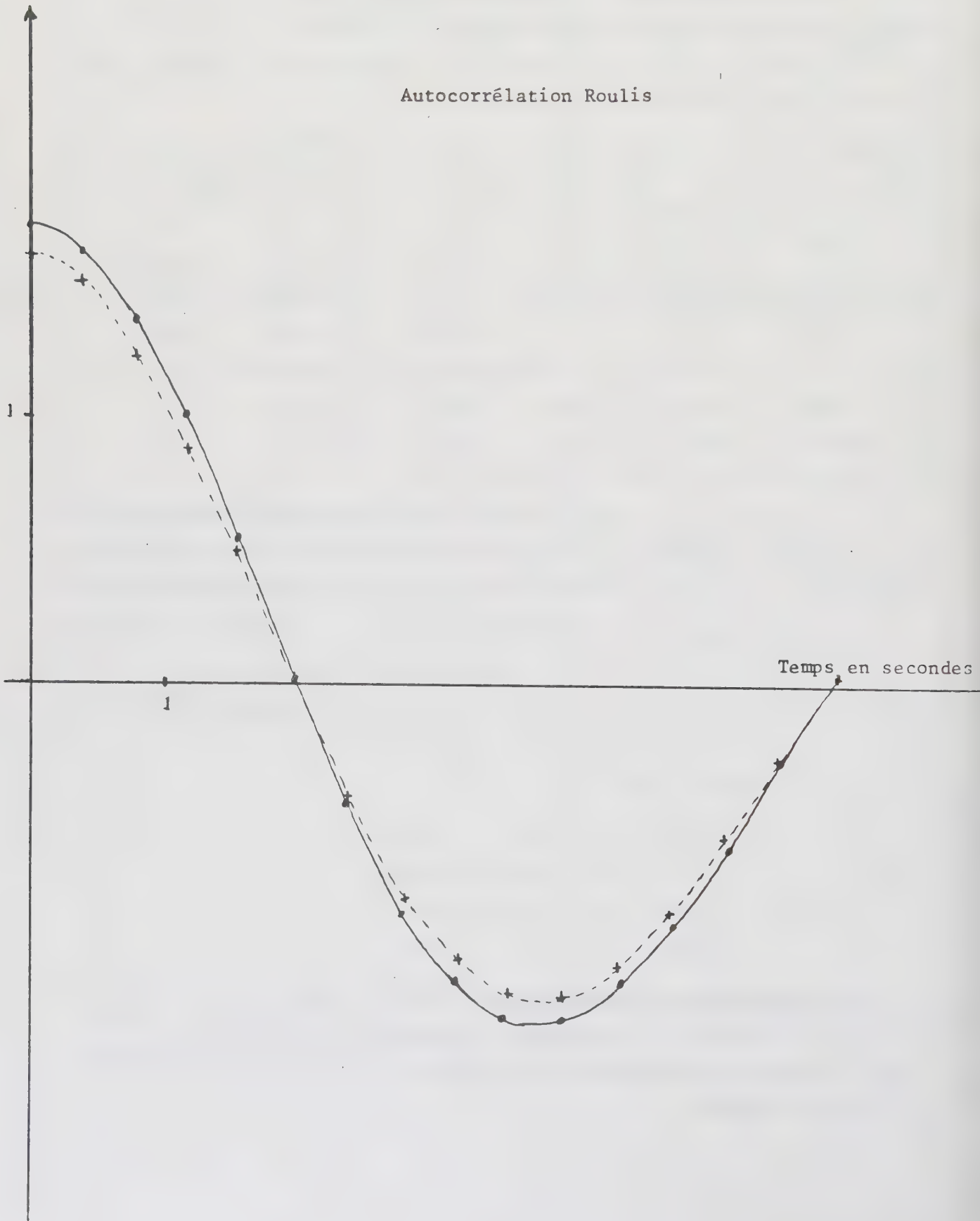
0.1	0
0	0.1

Le temps de calcul est le suivant :

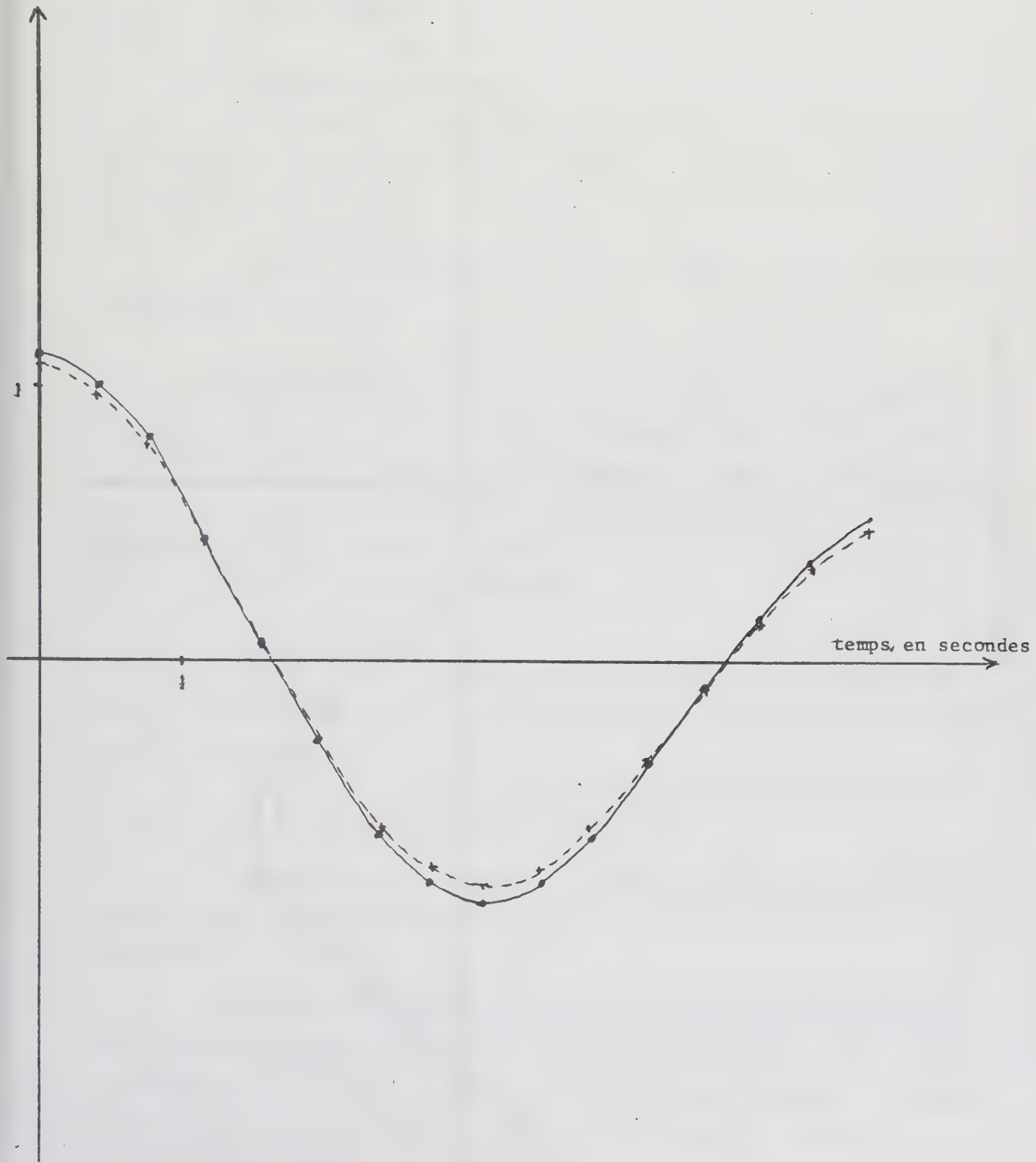
Algorithme de HO	3 mn 15
Filtrage non linéaire	6 mn 00
Total	9 mn 15

La fonction de corrélation de la sortie simulée avec les résultats du filtrage non linéaire et la fonction expérimentale sont présentées sur les figures suivantes (en trait plein les fonctions expérimentales, en pointillé, la fonction simulée).

Autocorrélation Roulis



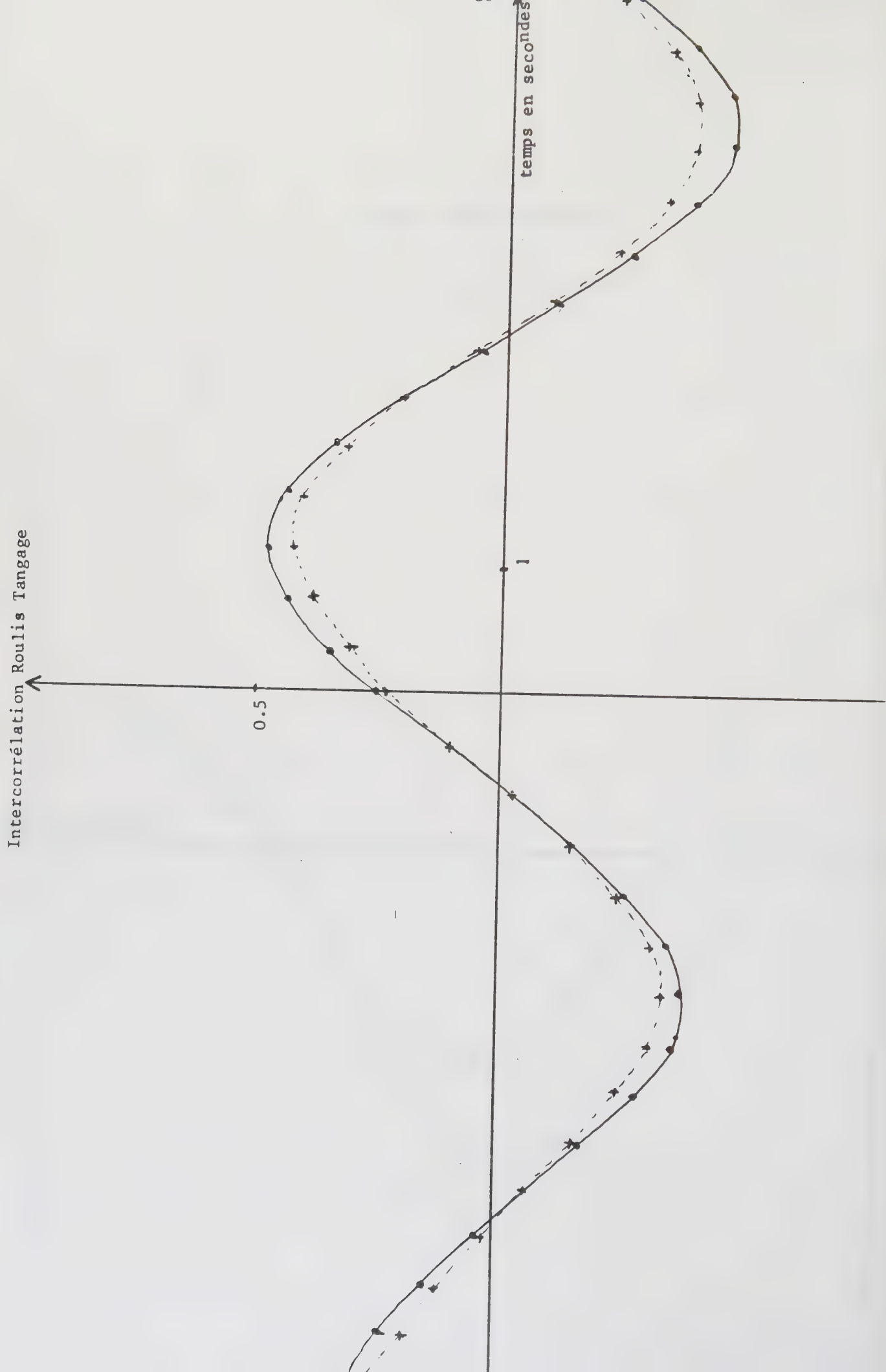
Autocorrélation Tangage



Intercorrélation Roulis Tangage

0.5

temps en secondes



5.2.6 - CONCLUSION DE L'ETUDE DU ROULIS TANGAGE

Nous retiendrons les points de comparaison suivants :

- Précision du résultat obtenu
- Temps de calcul
- Facilité d'emploi

* Précision des résultats :

Il apparaît, à la lecture des divers tableaux et courbes présentés, que les trois méthodes fournissent des résultats comparables, et que les fonctions de corrélation simulées à partir des trois modèles obtenus sont proches de la fonction expérimentale.

On peut donc conclure que les trois méthodes étudiées fournissent toutes de bons résultats.

* Temps de calcul

Des trois méthodes étudiées, celle de FAURRE est évidemment la plus rapide. Cela tient au fait que la fonction de corrélation de la sortie est calculée une fois au début, puis la récurrence suivante se limite à des produits de matrices. Viennent ensuite le filtrage non linéaire, (algorithme "temps réel"), puis la méthode de Mehra, où on calcule la fonction de corrélation de l'innovation à chaque itération.

* Facilité d'emploi

Chaque méthode présente des avantages et des inconvénients. La méthode de FAURRE est rapide, mais il faut absolument que le caractère positif réel soit respecté.

La méthode de MEHRA n'a nécessité aucune condition préalable, mais le temps de calcul est sensiblement plus important.

Le filtrage non linéaire est relativement rapide, peut être appliqué en ligne, mais nécessite une bonne initialisation, en particulier pour la variance de l'innovation.

En conclusion, l'aspect "temps réel" du filtrage non linéaire nous fera choisir cette méthode, à condition de disposer de connaissances a priori suffisantes (en particulier sur l'innovation). Dans le cas où on n'a aucune information, on pourra envisager d'employer la méthode de MEHRA, de préférence à la méthode de FAURRE, car il peut être parfois difficile d'obtenir le caractère positif réel de la fonction de corrélation de la sortie.

CONCLUSION

Ce travail est consacré à l'étude théorique et expérimentale de trois algorithmes de réalisation stochastique fournissant des modèles sous la forme filtre.

La première méthode étudiée est due à P. FAURRE. Cette méthode ne fait appel à aucune hypothèse à priori, si ce n'est la stationnarité du processus. Toutefois, le caractère positif réel, bien qu'assuré en théorie, n'est pas toujours respecté lors des applications pratiques, et nous n'avons pas trouvé de moyen agréable de tenir compte de cette contrainte.

Les méthodes envisagées ensuite nécessitent la connaissance à priori des matrices F et H , ce qui peut apparaître comme un certain handicap au départ. Toutefois, cette restriction peut être levée grâce à l'emploi préalable d'un algorithme de réalisation de type HO-IRVING qui fournit un triplet minimal (H, F, G) . Notons que la matrice G n'est plus utilisée dans la suite de ces méthodes, qui peuvent donc apparaître moins naturelles que l'algorithme de FAURRE.

La méthode de MEHRA nécessite un nombre important de calculs de fonction de corrélation, tandis que le filtrage non linéaire requiert une bonne initialisation, en particulier pour les matrices de variance-covariance.

Il est pourtant parfois plus facile de bien initialiser un algorithme de filtrage non linéaire que de respecter le caractère positif réel ce qui pourra nous faire opter pour cette méthode, en présence de connaissances à priori suffisantes.

BIBLIOGRAPHIE

- W.N. ANDERSON and al "Consistent estimates of the parameters of a linear system" Ann. Math. Sc. Dec. 1969.
- D.D. BOOZER and "On innovation sequence testing of the Kalman filter"
W.I. Mc DANIEL Jr IEEE vol.AC 17 n°1, February 1972, pp.158-160
- CHAMBADAL - OVAERT "Algèbre tensorielle et algèbre linéaire" Dunod.
- C. DONCARLI "Estimation des caractéristiques statistiques d'un processus aléatoire stationnaire"
D.E.A. Nantes 1972.
- C. DONCARLI - "Extension de la méthode de Mehra pour la détermination
Ph. De LARMINAT d'un filtre prédicteur optimal"
Revue Française d'Automatique, Informatique et de Recherche opérationnelle, n°juillet 73, J2.
- P. FAURRE "Réalisation markovienne de processus stationnaires"
IRIA, Rapport de recherche n°13, mars 1973.
- P. FAURRE "Représentation gaussienne markovienne des processus aléatoires, lemme sur le caractère positif réel et factorisation"
- P. FAURRE "Représentation of stochastic processes"
Ph. D. Dissertation, Stanford University 1967.
- P. FAURRE - "Un algorithme de réalisation stochastique"
J.P. MARMORAT C. R. Acad. Sc. Paris T. 268 (avril 1969)
- GANTMACHER "Théorie des matrices" Dunod.
- B.L. HO et R.E. KALMAN "Effective construction of linear state-variables models from input/output functions"
(Proc. 3rd Allerton Conference 1965)
- F. IRVING "Identification de systèmes" note EDF, n° HR 8202
- J. KAILATH "An innovation approach to least-squares estimation" ;
"Linear filtering in addition white noise"
IEEE, vol. AC 13, pp.646, 655, Dec. 1968.
- R.E. KALMAN "New methods and results in linear prediction and filtering theory"
Proc. Symp. on Engineering Applications of Random function theory and Probability, New York, Wiley 1961.
- R.E. KALMAN "A New approach to linear filtering and prediction theory" Journal of Basic Engineering, pp.95-108, March 1961.
- R.E. KALMAN "Lyapunov Functions for the problem of Luré in Automatic Control" Proc. N.A. 549, 1963.

- R.E. KALMAN - R.S. BUCY "New results in linear filtering and prediction theory"
Trans ASME, J. Basic Engineering, vol.83, pp.95-108,
March 1961.
- R.L. KASHYAP "Maximum likelihood Identification of stochastic Linear
System".IEEE, vol. AC 15, n°1, February 1970.
- Ph. De LARMINAT "Sur l'identification par filtrage non linéaire"
Doctorat-ès-Sciences, Nantes, 1971.
- Ph. De LARMINAT "Processus stochastiques - Filtrage linéaire"
Cours d'Automatique, Nantes 1972.
- Ph. De LARMINAT "Identification des systèmes dynamiques"
Cours d'Automatique, Nantes 1973.
- R.K. MEHRA "On the identification of variances and adaptive
Kalman filtering"
IEEE, vol. AC 75, pp. 175-184, April 70.
- R.K. MEHRA " On-line identification of linear Dynamic System
with Application to Kalman Filtering"
IEEE, vol. AC 16, n°1, February 71.
- R.K. MEHRA "Approach to Adaptive Filtering"
IEEE, vol. AC , Oct. 72
- J.M. PIASCO "Applications de l'identification par filtrage non
linéaire sous-optimal"
D.E.A. Nantes, 1971.
- WILKINSON "The Algebraic eigen value problem" Oxford.

A N N E X E

—

C.....
C.....
C.....

C
C PROGRAMME PRINCIPAL - METHODE DE MEHRA

C DIMENSION X(10),Y(10),Z(10),U(10),V(10),W(10),A(100),B(100), MEHRA
C 1C(100),D(110),E(1100),F(1000),G(100),P(1000),Q(1000),R(100) MEHRA
C LECT=1 MEHRA

C
C LECTURE DES DONNEES

C READ(LECT,100)MM,MN,MP,LE,IXDEP,ETYP,MAXI,IR MEHRA
C CALL LIRE(A,MN,MN,LECT) MEHRA
C CALL LIRE(B,MN,MP,LECT) MEHRA
C CALL LIRE(C,MM,MN,LECT) MEHRA
C CALL LIRE(G,MN,MM,LECT) MEHRA

C
C ECRITURE DES DONNEES

C WRITE(3,101)MN,MN MEHRA
C WRITE(3,102)MN,MP MEHRA
C WRITE(3,103)MM,MN MEHRA
C WRITE(3,104)MN,MM MEHRA
C WRITE(3,105)LE MEHRA
C WRITE(3,106)IXDEP MEHRA
C WRITE(3,107)ETYP MEHRA
C WRITE(3,108)MAXI MEHRA
C WRITE(3,109)IR MEHRA
C WRITE(3,200) MEHRA
C CALL ECRIT(A,MN,MN) MEHRA
C WRITE(3,201) MEHRA
C CALL ECRIT(B,MN,MP) MEHRA
C WRITE(3,202) MEHRA
C CALL ECRIT(C,MM,MN) MEHRA
C WRITE(3,203) MEHRA
C CALL ECRIT(G,MN,MM) MEHRA
C WRITE(3,999) MEHRA

C
C CALCUL DE DIMENSIONS - INITIALISATIONS

C MN1=MN+1 MEHRA
C MM2=MM*MM MEHRA
C MMN=MM*MN MEHRA
C MNP=MN*MP MEHRA
C MMN1=MMN+MM MEHRA
C MM2N1=MM2*(MN+1) MEHRA
C KN=0 MEHRA
C IX=IXDEP MEHRA
10 DO 11 I=1,MN MEHRA
11 X(I)=0. MEHRA
20 DO 21 I=1,MN MEHRA
21 Y(I)=X(I) MEHRA
DO 22 I=1,MMN1 MEHRA

```

22  D(I)=0.
    DO 23 I=1,MM2N1
23  E(I)=0.
    KK=0
    IX=IXDEP*(1-IR)+IX*IR
C
C  CALCUL DE LA RECURRENCE
C
30  KK=KK+1
    CALL MODEL(MM,MN,MP,X,Y,Z,U,V,W,A,B,C,G,IX,ETYP)
    CALL GENCO(MM,MN,Z,D,E,KK)
    IF(KK-LE)30,40,40
40  KN=KN+1
    CALL DGAIN(MM,MN,A,C,C,E,F,P,Q,R)
C
C  ECRITURE DES RESULTATS
C
    WRITE(3,300)KN
    WRITE(3,301)
    CALL GMPRD(A,G,D,MN,MN,MM)
    CALL ECRIT(D,MN,MM)
    WRITE(3,302)
    CALL ECRIT(E,MM,MM)
    WRITE(3,999)
    IF(KN-MAXI)41,41,50
41  GO TO 10
100 FORMAT(5I5,F5.2,2I5)
101 FORMAT('1/' DIMENSIONS DE LA MATRICE PHI',T50,'MN=',I5,' MN=',I5)MEHR
102 FORMAT('/',' DIMENSIONS DE LA MATRICE GAMMA',T50,'MN=',I5,' MP=',I5)MEHR
103 FORMAT('/',' DIMENSIONS DE LA MATRICE H      ',T50,'MM=',I5,' MN=',I5)MEHR
104 FORMAT('/',' DIMENSIONS DE LA MATRICE GAIN ',T50,'MN=',I5,' MM=',I5)MEHR
105 FORMAT('/',' LONGUEUR DE L'ECHANTILLON',T50,'LE=',I5)MEHR
106 FORMAT('/',' VALEUR D'INITIALISATION',T50,'IXDEP=',I2)MEHR
107 FORMAT('/',' ECART TYPE',T50,'ETYP=',F13.9)MEHR
108 FORMAT('/',' NOMBRE MAXIMUM D ITERATIONS',T50,'MAXI=',I3)MEHR
109 FORMAT('/',' VALEUR DE IR',T50,'IR=',I5, '//, ' SI IR=0 CHAQUE ',
1 ' ITERATION UTILISE LE MEME ECHANTILLON',/, '1')MEHR
200 FORMAT(///,10X,'MATRICE PHI',///)MEHR
201 FORMAT(///,10X,'MATRICE GAMMA'///)MEHR
202 FORMAT(///,10X,'MATRICE H',///)MEHR
203 FORMAT(' ',///,10X,'VALEUR INITIALE DU GAIN',///)MEHR
300 FORMAT(' ',///,10X,'ITERATION',I5)MEHR
301 FORMAT(///,10X,'VALEUR ESTIMEE DE LA MATRICE DE GAIN',///)MEHR
302 FORMAT(///,10X,'VALEUR ESTIMEE DE LA MATRICE DE VARIANCE',///)MEHR
999 FORMAT('1')MEHR
50  STOP
    END

```

```

      DIMENSION F(100),G(100),H(100),A(100),P(100),Q(100),R(100),S(100),
      IT(100),U(100),V(100)

```

```

C
      LECT=1
      READ(LECT,100) EPS
100    FORMAT(F10.5)
      READ(LECT,200) N,M
200    FORMAT(2I5)
      CALL LIRE(F,N,N,LECT)
      CALL LIRE(G,N,M,LECT)
      CALL LIRE(H,M,N,LECT)
      CALL LIRE(A,M,M,LECT)
      KK=1
      CALL ECRIT(F,N,N)
      CALL ECRIT(G,N,M)
      CALL ECRIT(H,M,N)
      CALL ECRIT(A,M,M)
      N2=N*N
      DO 10 I=1,N2
10     P(I)=0.
      1  CALL GMPRD(F,P,Q,N,N,N)
      CALL TRANS(F,R,N,N)
      CALL GMPRD(Q,R,S,N,N,N)
      CALL GMPRD(F,P,Q,N,N,N)
      CALL TRANS(H,R,M,N)
      CALL GMPRD(Q,R,U,N,N,M)
      CALL MSOUS(G,U,T,N,M)

C
      CALL GMPRD(H,P,Q,M,N,N)
      CALL TRANS(H,R,M,N)
      CALL GMPRD(Q,R,U,M,N,M)
      CALL MSOUS(A,U,Q,M,M)
      CALL TRANS(Q,V,M,M)
      CALL TRIAN(Q,R,M)
      CALL CHINV(R,Q,M,IDPOS)
      IF(IDPOS) 999,98,999

C
98     CALL GMPRD(T,R,Q,N,M,M)
      CALL TRANS(T,R,N,M)
      CALL GMPRD(Q,R,U,N,M,N)

C
      CALL MADD(S,U,T,N,N)
      WRITE(3,901) KK
901    FORMAT(///,' ITERATION',I3)
      CALL ECRIT(T,N,N)

C
      DO 20 I=1,N2
      IF(ABS(T(I)-P(I))-EPS) 20,20,51
20     CONTINUE
      WRITE(3,902)
902    FORMAT(///,' GAIN')
      CALL ECRIT(Q,N,M)
      WRITE(3,903)
903    FORMAT(///,' INNOVATION')

```

09/01/74

FORTMAIN

```
      CALL ECRIT(V,M,M)
      GO TO 999
51    CONTINUE
      DO 30 I=1,N2
30    P(I)=T(I)
      KK=KK+1
      GO TO 1
999   STOP
C      LIRE
C      ECRIT
C      GMPRD
C      TRANS
C      MSOUS
C      MADD
C      TRIAN
C      CHINV
C      CHOLS
      END
```

```
DIMENSION Z(18),C(18,18),TO(2,2),F(16),H(8),HH(18),XL(80),Y(2),X(4
1),AM(50),GAMA(4),V(10),W(10)
IX=51
CALL LIRE(F,4,4,1)
CALL LIRE(XL,4,2,1)
CALL LIRE(H,2,4,1)
CALL LIRE(GAMA,2,2,1)
DO 1 I=1,18
Z(I)=0.
DO 1 J=1,18
1 C(I,J)=0.
C INITIALISATION DU GAIN
CALL LIRE(V,4,2,1)
DO 2 I=7,14
J=I-6
2 Z(I)=V(J)
C INITIALISATION DIAGONALE VARIANCE
READ(1,100)(C(I,I),I=1,18)
100 FORMAT(5E15.7)
DO 5 I=1,4
5 X(I)=0.
IT=0
TK=1.
C INITIALISATION TO
READ(1,100)((TO(I,J),J=1,2),I=1,2)
C
C ECRITURE DES RESULTATS
IW=0
DO 3 KK=1,1000
JW=KK-1
IF(JW-IW*10) 51,52,51
52 IW=IW+1
WRITE(3,200) IT
200 FORMAT(////,20X,' ITERATION',I4)
WRITE(3,300)
300 FORMAT(' VALEUR DU GAIN')
DO 6 I=1,8
J=I+6
6 W(I)=Z(J)
CALL ECRIT(W,4,2)
WRITE(3,400)
400 FORMAT(' VARIANCE INNOVATION')
WRITE(3,101)((TO(I,J),J=1,2),I=1,2)
101 FORMAT(2(E15.7,5X))
C ETAPE DE PREDICTION
51 CONTINUE
CALL CADDE(C,Z,18,18,0.,15,1.,1)
CALL CADDE(C,Z,18,18,F(1),1,F(5),2)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,1,F(9),3)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,1,F(14),4)
CALL CPROD(C,Z,18,18,1.,1,1.,7,5)
CALL CPROD(C,Z,18,18,1.,1,1.,11,6)
C
CALL CADDE(C,Z,18,18,0.,16,1.,2)
```

```

CALL CADDE(C,Z,18,18,F(6),2,F(10),3)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,2,F(14),4)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,2,F(2),15)
CALL CPRDD(C,Z,18,18,1.,2,1.,8,5)
CALL CPRDD(C,Z,18,18,1.,2,1.,12,6)

```

C

```

CALL CADDE(C,Z,18,18,0.,17,1.,3)
CALL CADDE(C,Z,18,18,F(11),3,F(15),4)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,3,F(3),15)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,3,F(7),16)
CALL CPRDD(C,Z,18,18,1.,3,1.,9,5)
CALL CPRDD(C,Z,18,18,1.,3,1.,13,6)

```

C

```

CALL CADDE(C,Z,18,18,0.,18,1.,4)
CALL CADDE(C,Z,18,18,F(16),4,F(12),17)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,4,F(8),16)
CALL CADDE(C,Z,18,18,1.,4,F(4),15)
CALL CPRDD(C,Z,18,18,1.,4,1.,10,5)
CALL CPRDD(C,Z,18,18,1.,4,1.,14,6)

```

C

```

PH=TD(1,1)
CALL CRAZE(C,Z,18,5,0.,PH)
PH=TD(2,2)
CALL CRAZE(C,Z,18,6,0.,PH)
C(5,6)=TD(1,2)
C(6,5)=TD(2,1)

```

C

C

ETAPE ESTIMATION

C

```

CALL FILTR(F,XL,GAMA,H,X,Y,4,2,IX,V,W)
S=Y(1)
DO 10 I=1,18
10 HH(I)=0.
J=0
DO 20 I=1,7,2
J=J+1
20 PH(J)=H(I)
HH(5)=1.
CALL CESTA(C,Z,18,18,S,HH,0.,FC,VC,AM)
S=Y(2)
DO 30 I=1,18
30 HH(I)=0.
J=0
DO 40 I=2,3,2
J=J+1
40 HH(J)=H(I)
HH(6)=1.
CALL CESTA(C,Z,18,18,S,HH,0.,EC,VC,AM)

```

C

C

C

ETAPE FILTRE SECONDAIRE

```

TO(1,1)=TO(1,1)+TK/2.*(Z(5)*Z(5)+C(5,5)-TO(1,1))
TO(2,2)=TO(2,2)+TK/2.*(Z(6)*Z(6)+C(6,6)-TO(2,2))
TO(1,2)=TO(1,2)+TK/2.*(Z(5)*Z(6)+C(5,6)-TO(1,2))

```

IV 360N-FO-479 3-6

MAINPGM

DATE 27/05/74

TIME 10.28.11

TO(2,1)=TO(1,2)
TK=TK-TK*TK/2.

C

IT=IT+1
3 CONTINUE
STOP
END

SUBROUTINE CHOLS(A,K,NQ,IDPOS)

CHOLS

SOUS-PROGRAMME CHOLS

BUT RESOUDRE UN SYSTEME LINEAIRE SYMETRIQUE SIMULTANEMENT POUR
PLUSIEURS SECONDS MEMBRES

UTILISATION CALL CHOLS(A,K,NQ,IDPOS)

ARGUMENTS A MATRICE MONO-INDEXEE (VOIR EXEMPLE)
K ORDRE DU SYSTEME
NQ NOMBRES DE SECONDS MEMBRES
IDPOS INDICATEUR DE DEFINIE-POSITIVITE
(IDPOS=0 SI LA MATRICE EST DEFINIE-POSITIVE)

REMARQUE LES SOLUTIONS REMPLACENT LES SECONDS MEMBRES

METHODE CHOLESKI

EXEMPLE SYSTEME D'ORDRE 3 AVEC 2 SECONDS MEMBRES

MATRICE DU SYSTEME			SECONDS MEMBRES	
A(1)	A(2)	A(4)	A(7)	A(10)
	A(3)	A(5)	A(8)	A(11)
		A(6)	A(9)	A(12)

DIMENSION A(1),IS(49)
EQUIVALENCE(TERM,XN)

CHOLS
CHOLS

RESERVATION LIMITEE A 49

IR(I)=(I*(I+1))/2
IJ(I,J)=IR(J)-J+I
IDPOS=0
K2=K+NQ

CHOLS
CHOLS
CHOLS
CHOLS

CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE

DO 13 I=1,K
II=IR(I)

CHOLS
CHOLS

ELEMENTS DIAGONAUX

DIAG=A(II)
I1=II-I
IF(I-1) 1,4,1
1 I2=I-1
DO 3 L=1,I2
M=I1+L
P=A(M)

CHOLS
CHOLS
CHOLS
CHOLS
CHOLS
CHOLS

```
      P=P*P
      IF(IS(L))2,3,3
2     P=-P
3     DIAG=DIAG-P
4     IF(DIAG) 5,45,6
5     IS(I)=-1
      IDPOS=IDPOS+1
      DIAG=-SQRT(-DIAG)
      A(II)=-DIAG
      GO TO 7
6     IS(I)=1
      DIAG=SQRT(DIAG)
      A(II)=DIAG
C
C     ELEMENTS NON DIAGONAUX
C
7     I3=I+1
      DO 13 J=I3,K2
      JJ=IJ(I,J)
      JMK=J-K-1
      IF(JMK) 9,9,8
8     JJ=JJ-IR(JMK-1)-JMK
9     TERM=A(JJ)
      IF(I-1) 10,13,10
10    DO 12 L=1,I2
      IIL=II-L
      JIL=JJ-L
      P=A(IIL)*A(JIL)
      IL=I-L
      IF(IS(IL)) 11,12,12
11    P=-P
12    TERM=TERM-P
13    A(JJ)=TERM/DIAG
C
C     CALCUL DES SOLUTIONS
C
      JJ=II-K+1
      DO 45 L=1,NQ
      JJ=JJ+K
      I=K-1
14    JJI=JJ+I
      XN=A(JJI)
      IF(I-K+1) 20,22,22
20    J=K-1
21    JJJ=JJ+J
      IJM=IJ(I+1,J+1)
      XN=XN-A(JJJ)*A(IJM)
      IF(J-I-1) 22,22,30
30    J=J-1
      GO TO 21
22    IRM=IR(I+1)
      A(JJI)=XN/A(IRM)
      IF(I) 45,45,40
40    I=I-1
```

RAN IV 360N-FO-479 3-6

CHOLS

DATE 19/04/74

TIME

13

GO TO 14
45 CONTINUE
RETURN
END

CHO
CHO
CHO
CHO

SUBROUTINE LAPLA(IX,S,AM,V)

LAPLA

SOUS-PROGRAMME LAPLA

BUT GENERER UN NOMBRE ALEATOIRE

UTILISATION CALL LAPLA(IX,S,AM,V)

ARGUMENTS IX INDICATEUR D'ENTREE-SORTIE,NOMBRE IMPAIR
S ECART-TYPE
AM VALEUR MOYENNE
V NOMBRE ALEATOIRE ARGUMENT D'ENTREE-SORTIE

S.P.REQUIS NEANT

METHODE ON UTILISE LE DEPASSEMENT DE CAPACITE LIE AU HARDWARE IBM 3

A=0.0

DO 10 I=1,12

IY=IX*65539

IF(IY)11,12,12

11 IY=IY+2147483647+1

12 YFL=IY

YFL=YFL*.4656613E-9

IX=IY

10 A=A+YFL

V=(A-6.0)*S+AM

RETURN

END

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

LAPLA

SUBROUTINE LIRE(A,M,N,LECT)

LIRE

[illegible]

SOUS-PROGRAMME LIRE

BUT LECTURE D'UNE MATRICE

UTILISATION CALL LIRE(A,M,N,LECT)

ARGUMENTS A MATRICE A LIRE
M NOMBRE DE LIGNES DE A
N NOMBRE DE COLONNES DE A
LECT NUMERO DU LECTEUR DE CARTES

S.P. REQUIS NEANT

METHODE LA MATRICE A EST LUE LIGNE PAR LIGNE
A CHAQUE LIGNE CORRESPOND UNE CARTE

DIMENSION A(1)

$$MN = M * N$$

DO 1 I=1,M

$$L = MN - M + I$$

```
1 READ(LECT,100)(A(K),K=I,L,M)
```

```
100  FORMAT (5E15.7)
```

RETURN

END

LIRE
LIRE
LIRE
LIRE
LIRE

LIRE
LIRE

SUBROUTINE GENCO(MM,MN,Z,D,E,KK)

GENCO

SOUS-PROGRAMME GENCO

BUT . GENERER LA FONCTION DE CORRELATION DE L'INNOVATION

UTILISATION CALL GENCO(MM,MN,Z,D,E,KK)

ARGUMENTS	Z INNOVATION	MN
	D VECTEUR TRAVAIL ARGUMENT D'ENTREE-SORTIE	
	E FONCTION DE CORRELATION	MM*MM.MN
	KK INDICE D'ITERATION	

REMARQUE LA MATRICE E EST CALCULEE SOUS FORME TRANSPPOSEE

S.P. REQUIS NEANT

METHODE CALCUL ITERATIF DES MATRICES DE COVARIANCE

```

DIMENSION Z(1),D(1),E(1)

```

$$MMN = MM * MN$$

```
DO 1 I=1,MMN
```

$$J = I + MM$$
$$1 \quad D(I) = D(J)$$

DO 2 I=1,MM

$$J = I + MMN$$
$$2 \quad D(J) = Z(I)$$
$$M = MMN + MM$$

IF (KK-MN) 3, 3, 4

3 MAX=KK

GO TO 5

4 $\Delta X = MN + 1$

5 $LL=0$

```
DO 10 L1=1,MAX
```

$$L = L_1 - 1$$
$$NLM = (MN - L) * MM$$

DD 10 J=1,MM

$$KJ = MMN + J$$

```
DO 10 I=1,MM
```

$$KI = NLM + I$$
$$LL = LL + 1$$

10 $E(LL) = E(LL) + (D(KJ) * D(KI) - E(LL)) / (KK - L)$

RETURN

END

SUBROUTINE ECRIT(A,M,N)

ECR

CCCCCCCCCCCCCCCC

SOUS-PROGRAMME ECRIT

BUT ECRITURE D'UNE MATRICE

UTILISATION CALL ECRIT(A,M,N)

ARGUMENTS A MATRICE A ECRIRE
M NOMBRE DE LIGNES DE A
N NOMBRE DE COLONNES DE A

S.P. REQUIS NEANT

METHODE LA MATRICE EST ECRITE LIGNE PAR LIGNE

DIMENSION A(1)

$$M \cap N = \{1\} \neq N$$

DO 1 I=1,M

$$L = MN - M + I$$

```
1 WRITE(3,100)(A(K),K=I,L,M)
```

```
100  FORMAT(1X,10E12.5)
```

RETURN

END

ECRI
ECRI
ECRI
ECRI
ECRI
ECRI
ECRI
ECRI

SUBROUTINE DGAIN(MM,MN,A,C,G,E,F,P,Q,R)

DGAIN

SOUS-PROGRAMME DGAIN

BUT CALCULER LA NOUVELLE VALEUR DU GAIN DU FILTRE LINEAIRE

UTILISATION CALL DGAIN(MM,MN,A,C,G,E,F,P,Q,R)

ARGUMENTS

A MATRICE DE TRANSITION

C MATRICE D'OBSERVATION

G GAIN PRECEDENT

E FONCTION DE CORRELATION

F,P,Q,R VECTEURS TRAVAIL

REMARQUE

LE CALCUL DE LA PSEUDO-INVERSE EST FAIT PAR LA METHODE DE CHOLEVSKI

S.P.REQUIS

GMPRD

AVABV

MSTR

CHOLS

TPRD

MATA

METHODE

CALCUL ITERATIF DU GAIN

DIMENSION A(1),C(1),G(1),E(1),F(1),P(1),Q(1),R(1)

MM1=MM+1

MN1=MN+1

MM2=MM*MM

MN2=MN*MN

MMN=MM*MN

MM2N=MM2*MN

MR=(MM2+MM)/2

NR=(MN2+MN)/2

CALL GMPRD(G,C,P,MN,MM,MN)

DO 1 IJ=1,MN2

1 P(IJ)=-P(IJ)

DO 2 IJ=1,MN2,MN1

2 P(IJ)=P(IJ)+1.

CALL GMPRD(P,A,Q,MN,MN,MN)

CALL GMPRD(C,A,P,MM,MN,MN)

DO 10 K=1,MN

JK=K*MM-MMN

IJ=0

DO 11 J=1,MN

JK=JK+MMN-MM

DO 11 I=1,MM

IJ=IJ+1

JK=JK+1

```
11 F(JK)=P(IJ)
CALL AVABV(P,Q,R,MM,MN,MN)
10 CONTINUE
C
C CALCUL DE L'INVERSE DE LA CORRELATION DE L'INNOVATION
C
CALL MSTR(E,P,MM,0,1)
DO 20 I=1,MM2
J=MR+I
20 P(J)=0.
DO 21 I=1,MM2,MM1
J=MR+I
21 P(J)=1.
CALL CHOLS(P,MM,MM,IDPOS)
DO 22 I=1,MM2
J=I+MR
22 R(I)=P(J)
DO 23 I=1,MM2N
J=I+MM2
23 P(I)=E(J)
C
C CALCUL DU NOUVEAU GAIN
C
CALL TPRD(P,R,Q,MM,MMN,0,0,MM)
CALL TPRD(F,Q,P,MMN,MN,0,0,MM)
DO 24 I=1,MMN
J=MMN-I+1
K=NR+J
24 P(K)=P(J)
CALL MATA(F,P,MMN,MN,0)
CALL CHOLS(P,MN,MM,IDPOS)
DO 25 I=1,MMN
J=I+NR
25 G(I)=G(I)+P(J)
C
C CALCUL DE LA VARIANCE DU BRUIT
C
CALL GMPRD(G,E,R,MN,MM,MM)
CALL GMPRD(C,R,Q,MM,MN,MM)
DO 26 I=1,MM2
26 R(I)=E(I)-Q(I)
RETURN
END
```

DGAIN
DGAIN
DGAINDGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAINDGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAINDGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN
DGAIN

SUBROUTINE AVABV(A,B,V,N1,N2,N3)

AVABV

SOUS-PROGRAMME AVABV

BUT REALISER LE PRODUIT DE 2 MATRICES A ET B

UTILISATION CALL AVABV(A,B,V,N1,N2,N3)

```

ARGUMENTS      A MATRICE              N1*N2
                B MATRICE              N2*N3
                V VECTEUR TRAVAIL      MAX(N1,N2,N3)

```

REMARQUES LES MATRICES A ET B SONT MONO-INDICEES
LE RESULTAT DU PRODUIT EST REPLACÉ DANS A

S.P. REQUIS NEANT

METHODE LE CALCUL SE FAIT LIGNE PAR LIGNE

```
DIMENSION A(1),B(1),V(1)
DO 10 I=1,N1
```

AVABV

AVABV

CALCUL DES ELEMENTS D'UNE LIGNE DU PRODUIT

```
DO 11 J=1,N3
```

AVABV

11 $V(J) = 0$

AVABV

DO 12 J=1,N3

AVABV

DO 12 K=1,N2

AVABV

$$M1 = I + (K-1) * N1$$

AVABV

$$M2 = K + (J - 1) * N2$$

AVABV

```
12  V(J)=V(J)+A(M1)*B(M2)
```

AVARV

MISE EN MEMOIRE DANS LA LIGNE CORRESPONDANTE DE A

```
00 10 J=1,N3
```

AVABV

$$M3 = I + (J - 1) * N1$$

AVABV

10 $A(M3) = V(J)$

AVABV

RETURN

A V A R V

END

AVABV

SUBROUTINE GMPRD(A,B,R,N,M,L)

GMPRD

SOUS-PROGRAMME GMPRD

BUT EFFECTUER LE PRODUIT DE DEUX MATRICES

UTILISATION CALL GMPRD(A,B,R,N,M,L)

ARGUMENTS A,B MATRICES D'ENTREE
R MATRICE DE SORTIE $R=A*B$
N,M DIMENSIONS DE A
M,L DIMENSIONS DE B

REMARQUES LES MATRICES SONT MONO-INDICEES
R EST DE DIMENSION N,L

S.P.REQUIS NEANT

DIMENSION A(1),B(1),R(1)

IR=0

IK=-M

DO 10 K=1,L

IK=IK+M

DO 10 J=1,N

IR=IR+1

JI=J-N

IB=IK

R(IR)=0.

DO 10 I=1,M

JI=JI+N

IB=IB+1

10 R(IR)=R(IR)+A(JI)*B(IB)

RETURN

END

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

GMPRD

SUBROUTINE TPRD(A,B,R,N,M,MSA,MSB,L)

TPI 3

Sous-programme TPRD

BUT CALCULER LE PRODUIT D'UNE MATRICE PAR LA TRANSPOSEE D'UNE AUTRE

UTILISATION CALL TPRD(A,B,R,N,M,MSA,MSB,L)

ARGUMENTS	A MATRICE D'ENTREE	DIMENSION N*M	MODE DE STOCKAGE	MSA
B MATRICE D'ENTREE	DIMENSION M*L	MODE DE STOCKAGE	MSB	
		T		
R MATRICE DE SORTIE		R=A *B		

S. P. REQUIS LOC

```

DIMENSION A(1),B(1),R(1)
MS=MSA*10+MSB
IF(MS-22) 30,10,30
10 DO 20 I=1,N
20 R(I)=A(I)*B(I)
RETURN
30 IR=1
DO 90 K=1,L
DO 90 J=1,M
R(IR)=0.0
DO 80 I=1,N
IF(MS) 40,60,40
40 CALL LOC(I,J,IA,N,M,MSA)
CALL LOC(I,K,IB,N,L,MSB)
IF(IA) 50,80,50
50 IF(IB) 70,80,70
60 IA=N*(J-1)+1
IB=N*(K-1)+1
70 R(IR)=R(IR)+A(IA)*B(IB)
80 CONTINUE
90 IR=IR+1
RETURN
END

```

SUBROUTINE MSTR(A,R,N,MSA,MSR)

MST

C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C
C

SOUS-PROGRAMME MSTR

BUT TRANSFERER LE CONTENU DE LA MATRICE A DANS LA MATRICE R

UTILISATION CALL MSTR(A,R,N,MSA,MSR)

ARGUMENTS	A MATRICE D'ENTREE	N*N
	R MATRICE DE SORTIE	N*N
	MSA MODE DE STOCKAGE DE A	
	MSR MODE DE STOCKAGE DE R	

S.P. REQUIS LOC

```

DIMENSION A(1),R(1)
DO 20 I=1,N
DO 20 J=1,N
IF(MSR) 5,10,5
5 IF(I-J) 10,10,20
10 CALL LOC(I,J,IR,N,N,MSR)
IF(IR) 20,20,15
15 R(IR)=0.0
CALL LOC(I,J,IA,N,N,MSA)
IF(IA) 20,20,18
18 R(IR)=A(IA)
20 CONTINUE
RETURN
END

```

[illegible]

SUBROUTINE MODEL(MM,MN,MP,X,Y,Z,U,V,W,A,B,C,G,IX,ETYP)

MODEL 1

.....
SOUS-PROGRAMME MODEL

BUT GENERER LA SEQUENCE INNOVATION

UTILISATION CALL MODEL(MM,MN,MP,X,Y,Z,U,V,W,A,B,C,G,IX,ETYP)

ARGUMENTS X ETAT REEL MN
 Y ETAT ESTIME MN
 Z INNOVATION MN
 U,V,W VECTEURS TRAVAIL MP,MN,MN
 A MATRICE DE TRANSITION MN*MN
 B MATRICE DE COMMANDE MN*MP
 C MATRICE DE SORTIE MN*MN
 G GAIN DU FILTRE MN*MM
 IX INDICATEUR DU CHOIX DE LA SEQUENCE
 ETYP ECART TYPE DES BRUITS

REMARQUES LES BRUITS SONT GENERES PAR LE S.P.LAPLA
 X,Y,Z,IX SONT DES ARGUMENTS D'ENTREE-SORTIE

S.P.REQUIS GMPRD
 LAPLA

METHODE CALCUL CLASSIQUE EN MONO-INDICE

DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),U(1),V(1),W(1),A(1),B(1),C(1),G(1)

MODEL 2

GENERATION DE LA SORTIE

DO 1 I=1,MN
 V(I)=X(I)-Y(I)
 CALL GMPRD(C,V,W,MM,MN,1)

MODEL 3

MODEL 4

MODEL 5

GENERATION DU BRUIT DE SORTIE

DO 2 I=1,MM
 CALL LAPLA(IX,ETYP,0.,VV)
 U(I)=VV
 Z(I)=W(I)+VV

MODEL 6

MODEL 7

MODEL 8

GENERATION DU BRUIT SUR L'ETAT

CALL GMPRD(B,U,W,MN,MP,1)
 CALL GMPRD(A,X,V,MN,MN,1)
 DO 4 I=1,MN
 X(I)=V(I)+W(I)

MODEL 12

MODEL 13

MODEL 14

MODEL 15

GENERATION DE L'INNOVATION

IV 360N-FO-479 3-6

MODEL

DATE 27/05/74

TIME

10.28.57

C

```
CALL GMPRD(G,Z,U,MN,MM,1)
DO 5 I=1,MN
  V(I)=Y(I)+U(I)
CALL GMPRD(A,V,Y,MN,MN,1)
RETURN
END
```

5

MODEL 16
MODEL 17
MODEL 18
MODEL 19
MODEL 20
MODEL 21

```

SUBROUTINE MADD(A,B,C,N,M)

```

CALCULE $C=A+B$ DE DIMENSION N,M

```

DIMENSION A(1),B(1),C(1)

```

$$NM = N * M$$

DO 1 K=1,NM

1 $C(K) = A(K) + B(K)$

RETURN

END

SUBROUTINE MSOUS(A,B,C,N,M)

```
C .....  
C  
C          CALCULE  C=A-B          DE DIMENSION N,M  
C .....  
  DIMENSION A(1),B(1),C(1)  
  NM=N*M  
  DO 1 K=1,NM  
1    C(K)=A(K)-B(K)  
  RETURN  
  END
```

SUBROUTINE PLEIN(A,B,N)

```

C .....
C
C      MET EN MEMOIRE UNE MAT.SYM.DONT ON NE DONNE QUE LA PARTIE SUP.
C
C      A  MATRICE D ENTREE   INDICE CHOLESKI
C      B  MATRICE DE SORTIE  INDICE I.B.M.
C
C      DIMENSION DES MATRICES   N,N
C .....
C      DIMENSION A(1),B(1)
C      KK=C
C      DO 1 J=1,N
C      DO 1 I=1,J
C      KK=KK+1
C      K=I+(J-1)*N
1    B(K)=A(KK)
C      KK=C
C      DO 2 I=1,N
C      DO 2 J=1,I
C      KK=KK+1
C      K=I+(J-1)*N
2    B(K)=A(KK)
C      RETURN
C      END

```

SUBROUTINE TRANS(A,B,N,M)

EFFECTUE B=AT

DIMENSION DE A N,M

DIMENSION DE B M,N

DIMENSION A(1),B(1)

KK=0

DO 1 I=1,N

K=I-N

DO 1 J=1,M

KK=KK+1

K=K+N

B(KK)=A(K)

RETURN

END

SUBROUTINE CHINV(A,B,N,IDPOS)

.....
 C
 C
 C CALCULE INV(A), A DONNEE CHOLESKI
 C A EST DETRUIE REMPLACEE PAR INV(A),INDICE I.B.M.
 C
 C

DIMENSION A(1),B(1)
 N1=N*(N+1)/2
 DO 1 KK=1,N1
 1 B(KK)=A(KK)
 N11=N1+1
 N12=N1+N*N
 DO 2 KK=N11,N12
 2 B(KK)=0.
 N3=N+1
 DO 3 KK=N11,N12,N3
 3 B(KK)=1.
 CALL CHOLS(B,N,N,IDPOS)
 IF(IDPOS)4,5,4
 4 WRITE(3,100)
 100 FORMAT(//,' MATRICE NON DEF.POS.',//)
 5 DO 6 KK=N11,N12
 K=KK-N1
 6 A(K)=B(KK)
 RETRN
 END

SUBROUTINE TRIAN(A,B,N)

```
C .....  
C  
C MET EN MEMOIRE LA PARTIE SUPERIEURE D UNE MAT. SYMETRIQUE  
C A MATRICE D ENTREE INDICE I.B.M.  
C B MATRICE DE SORTIE INDICE CHOLESKI  
C DIMENSION DES MATRICES N,N  
C .....  
C DIMENSION A(1),B(1)  
C KK=C  
C DO 1 J=1,N  
C DO 1 I=1,J  
C K=I+(J-1)*N  
C KK=KK+1  
1 B(KK)=A(K)  
C RETURN  
C END
```

```
      SUBROUTINE FILTR(F,XK,T,H,X,Y,N,M,IX,V,W)
      DIMENSION F(1),XK(1),T(1),H(1),X(1),Y(1),V(1),W(1)
C      GENERATION SORTIE
      DO 1 I=1,M
      CALL LAPLA(IX,1.,0.,D)
1      V(I)=D
      CALL GMPRD(H,X,Y,M,N,1)
      CALL GMPRD(T,V,W,M,M,1)
      DO 2 I=1,M
2      Y(I)=Y(I)+W(I)
C      GENERATION ETAT
      CALL GMPRD(F,X,V,N,N,1)
      CALL GMPRD(XK,W,X,N,M,1)
      DO 3 I=1,N
3      X(I)=X(I)+V(I)
      RETURN
      END
```

```
SUBROUTINE POSE(A,B,M,IMAX,NMAX)
DIMENSION A(1),B(1)
M2=M*M
IM=IMAX*M2+1
L=0
DO 1 K=1,IM,M2
KM=K+M2-1
L=L+1
DO 1 I=K,KM
1 B(I)=A(I)*(NMAX-L+1)/NMAX
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE CESTA(C,Z,M,N,S,A,V,EC,VC,AM)
DIMENSION C(1),Z(1),AM(1),A(1)
DO 10 K=1,M
  AM(K)=0.
DO 10 L=1,M
  KL=N*(K-1)+L
10 AM(K)=AM(K)+A(L)*C(KL)
  AMA=V
  COR=S
DO 20 K=1,M
  AMA=AMA+A(K)*AM(K)
20 COR=COR-A(K)*Z(K)
  COR=COR/AMA
DO 30 K=1,M
  Z(K)=Z(K)+COR*AM(K)
  AMB=AM(K)/AMA
DO 30 L=1,M
  KL=N*(K-1)+L
30 C(KL)=C(KL)-AM(L)*AMB
  EC=V*COR
  VC=V-V*V/AMA
  RETURN
END
```

```
      SUBROUTINE CRAZE(C,Z,N,I,ZM,V)
C      REMPLACE Z(I) PAR UNE VARIABLE ALEATOIRE INDEPENDANTE DE VARIANCE V
C      DE MOYENNE ZM
      DIMENSION C(1),Z(1)
      Z(I)=ZM
      IK=I-N
      NI=N*(I-1)
      DO 10 K=1,N
      IK=IK+N
      KI=NI+K
      C(IK)=0.
10    C(KI)=0.
      II=N*(I-1)+I
      C(II)=V
      RETURN
      END
```

SUBROUTINE CADDE(C,Z,M,N,FI,I,FJ,J)

C

DIMENSION C(1),Z(1)

Z(I)=FI*Z(I)+FJ*Z(J)

II=N*(I-1)+I

IJ=N*(J-1)+I

JJ=N*(J-1)+J

CC=FI*FI*C(II)+2*FI*FJ*C(IJ)+FJ*FJ

1*C(JJ)

IK=I-N

JK=J-N

NI=N*(I-1)

DO 10 K=1,M

IK=IK+N

JK=JK+N

KI=NI+K

C(IK)=FI*C(IK)+FJ*C(JK)

10 C(KI)=C(IK)

C(II)=CC

RETURN

END

```
SUBROUTINE CPROD(C,Z,M,N,FI,I,FKL,K,L)
DIMENSION C(1),Z(1)
II=N*(I-1)+I
KK=N*(K-1)+K
LL=N*(L-1)+L
KL=N*(K-1)+L
ZZ=FKL*(C(KL)-Z(K)*Z(L))
CC=FKL*FKL*(C(KK)*C(LL)+C(KL)*C(KL))
G1=FKL*Z(K)
G2=FKL*Z(L)
IF(K-I) 11,10,11
10  G=FI+G2
    CALL CADDE(C,Z,M,N,G,I,G1,L)
    GO TO 40
11  IF(L-I) 31,30,31
30  G=FI+G1
    CALL CADDE(C,Z,M,N,G,I,G2,K)
    GO TO 40
31  CALL CADDE(C,Z,M,N,FI,I,G1,L)
    CALL CADDE(C,Z,M,N,1.,I,G2,K)
40  Z(I)=Z(I)+ZZ
    C(II)=C(II)+CC
    RETURN
END
```